Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Lineaariset DY:t

1. kertaluvun lineaarinen DY

Yhtälön

$$y' + a(x)y = b(x)$$

ratkaisut ovat muotoa $y = Cy_1 + y_0$,

1. kertaluvun lineaarinen DY

Yhtälön
$$y' + a(x)y = b(x)$$
ratkaisut ovat muotoa $y = Cy_1 + y_0$, missä y_1 on homogeenisen yhtälön
$$y' + a(x)y = 0$$
ratkaisu $\neq 0$ ja y_0 on jokin alkuperäisen yhtälön ratkaisu.

1. kertaluvun lineaarinen DY

Yhtälön
$$y' + a(x)y = b(x)$$
ratkaisut ovat muotoa $y = Cy_1 + y_0$, missä y_1 on homogeenisen yhtälön
$$y' + a(x)y = 0$$
ratkaisu $\neq 0$ ja y_0 on jokin alkuperäisen yhtälön ratkaisu.

Ratkaisumenetelmä

- Homogeenisen yhtälön ratkaisu y_H.

Lineaariset DY:t

1. kertaluvun lineaarinen DY

Yhtälön
$$y' + a(x)y = b(x)$$
ratkaisut ovat muotoa $y = Cy_1 + y_0$, missä y_1 on homogeenisen yhtälön
$$y' + a(x)y = 0$$
ratkaisu $\neq 0$ ja y_0 on jokin alkuperäisen yhtälön ratkaisu.

Ratkaisumenetelmä

- Homogeenisen yhtälön ratkaisu y_H.
- Vakion variointi: Sijoitetaan $y = C(x)y_H$ alkuperäiseen DY:hyn ja ratkaistaan $C(x)$.

2. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

2. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

- Esiintyvät erityisesti fysiikassa (klassinen ja kvanttifysiikka)

2. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

- Esiintyvät erityisesti fysiikassa (klassinen ja kvanttifysiikka)
- Ei yleistä integrointiin perustuvaa ratkaisumenetelmää

2. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

- Esiintyvät erityisesti fysiikassa (klassinen ja kvanttifysiikka)
- Ei yleistä integrointiin perustuvaa ratkaisumenetelmää
- Erikoistapauksia tutkittu kauan

2. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

- Esiintyvät erityisesti fysiikassa (klassinen ja kvanttifysiikka)
- Ei yleistä integrointiin perustuvaa ratkaisumenetelmää
- Erikoistapauksia tutkittu kauan
- Useita ratkeavia erikoistapauksia

2. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

- Esiintyvät erityisesti fysiikassa (klassinen ja kvanttifysiikka)
- Ei yleistä integrointiin perustuvaa ratkaisumenetelmää
- Erikoistapauksia tutkittu kauan
- Useita ratkeavia erikoistapauksia

Lause

Jos homogeeniselle DY:lle

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

tunnetaan yksikin ratkaisu, voidaan kaikki alkuperäisen DY:n ratkaisut selvittää.

Sarjaratkaisu

Jos $a(x)$ ja $b(x)$ ovat riittävän säännöllisiä, voidaan DY:n

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

ratkaisu löytää Taylorin kehitelmän

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

avulla.

Sarjaratkaisu

Jos $a(x)$ ja $b(x)$ ovat riittävän säännöllisiä, voidaan DY:n

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

ratkaisu löytää Taylorin kehitelmän

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

avulla.

Esimerkki 16

Airyn DY $y'' + xy = 0$ alkuehdoilla $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Määritelmä

Muotoa

$$y' = g(x)f(y)$$

oleva DY on separoituva.

Määritelmä

Muotoa

$$y' = g(x)f(y)$$

oleva DY on separoituva.

Separoituvan DY:n ratkaiseminen

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

Määritelmä

Muotoa

$$y' = g(x)f(y)$$

oleva DY on separoituva.

Separoituvan DY:n ratkaiseminen

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dx} = g(x)f(y) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{f(y)}\,dy = g(x)\,dx \end{aligned}$$

Separoituvat DY:t

Määritelmä

Muotoa

$$y' = g(x)f(y)$$

oleva DY on separoituva.

Separoituvan DY:n ratkaiseminen

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dx} = g(x)f(y) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{f(y)}\,dy = g(x)\,dx \\ \Leftrightarrow \quad & \int \frac{1}{f(y)}\,dy = \int g(x)\,dx + C \end{aligned}$$

Esimerkit 19–21

Esimerkki 21:

Esimerkit 19–21

Esimerkki 21:

$$ma = mg - kv^2$$

Esimerkit 19–21

Esimerkki 21:

$$
\begin{aligned}
& ma = mg - kv^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2
\end{aligned}
$$

Esimerkit 19–21

Esimerkki 21:

$$
\begin{aligned}
& ma = mg - kv^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2}\,dv = dt
\end{aligned}
$$

Esimerkit 19–21

Esimerkki 21:

$$
\begin{aligned}
& ma = mg - kv^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2}\,dv = dt \\
\Leftrightarrow\quad & \int \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2}\,dv = \int dt + C
\end{aligned}
$$

Esimerkki

$$y(t) = y_0 + \int_0^t \frac{C}{y(x)}\,dx.$$

Esimerkki

$$y(t) = y_0 + \int_0^t \frac{C}{y(x)}\, dx.$$

Derivoimalla saadaan

$$y' = \frac{C}{y}$$

Esimerkki

$$y(t) = y_0 + \int_0^t \frac{C}{y(x)}\, dx.$$

Derivoimalla saadaan

$$y' = \frac{C}{y},$$

siis

$$\frac{dy}{dt} = \frac{C}{y}$$

Esimerkki

$$y(t) = y_0 + \int_0^t \frac{C}{y(x)}\,dx.$$

Derivoimalla saadaan

$$y' = \frac{C}{y},$$

siis

$$\frac{dy}{dt} = \frac{C}{y} \Leftrightarrow y\,dy = C\,dt$$

Esimerkki

$$y(t) = y_0 + \int_0^t \frac{C}{y(x)}\, dx.$$

Derivoimalla saadaan

$$y' = \frac{C}{y},$$

siis

$$\frac{dy}{dt} = \frac{C}{y} \Leftrightarrow y\, dy = C\, dt \Leftrightarrow \int y\, dy = \int C\, dt.$$

Esimerkki

$$y(t) = y_0 + \int_0^t \frac{C}{y(x)}\, dx.$$

Derivoimalla saadaan

$$y' = \frac{C}{y},$$

siis

$$\frac{dy}{dt} = \frac{C}{y} \Leftrightarrow y\, dy = C\, dt \Leftrightarrow \int y\, dy = \int C\, dt.$$

Näin ollen $\frac{1}{2}y^2 = Ct + k$

Esimerkki

$$y(t) = y_0 + \int_0^t \frac{C}{y(x)}\,dx.$$

Derivoimalla saadaan

$$y' = \frac{C}{y},$$

siis

$$\frac{dy}{dt} = \frac{C}{y} \Leftrightarrow y\,dy = C\,dt \Leftrightarrow \int y\,dy = \int C\,dt.$$

Näin ollen $\frac{1}{2}y^2 = Ct + k$ ja siis

$$y = \sqrt{2Ct + 2k}.$$

Esimerkki

$$y(t) = y_0 + \int_0^t \frac{C}{y(x)}\,dx.$$

Derivoimalla saadaan

$$y' = \frac{C}{y},$$

siis

$$\frac{dy}{dt} = \frac{C}{y} \Leftrightarrow y\,dy = C\,dt \Leftrightarrow \int y\,dy = \int C\,dt.$$

Näin ollen $\frac{1}{2}y^2 = Ct + k$ ja siis

$$y = \sqrt{2Ct + 2k}.$$

Alkuehdosta $y_0 = \sqrt{2k}$ saadaan $k = \frac{y_0^2}{2}$.

Eksaktit DY:t

Yleistetty ketjusääntö

Jos y ja z ovat x:n funktioita, on

$$\frac{d}{dx}F(y,z) = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

Eksaktit DY:t

Yleistetty ketjusääntö

Jos y ja z ovat x:n funktioita, on

$$\frac{d}{dx}F(y,z) = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

Esimerkki

Olkoon $y = \sin x$ ja $z = x^2 + e^x$ sekä $F(y,z) = yz^2 + 3yz$.
Lasketaan $\frac{d}{dx}F(y,z)$.

Yleistetty ketjusääntö

Jos y ja z ovat x:n funktioita, on

$$\frac{d}{dx}F(y,z) = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

Esimerkki

Olkoon $y = \sin x$ ja $z = x^2 + e^x$ sekä $F(y,z) = yz^2 + 3yz$.
Lasketaan $\frac{d}{dx}F(y,z)$.

Esimerkki

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y'$$

Esimerkki

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y'$$

Esimerkki

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y'$$

Ratkaisuyrite

Muotoa

$$f(x,y) + g(x,y)y' = 0$$

oleva DY:tä voidaan yrittää tulkita muodossa

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' = 0$$

Eksaktit DY:t

Esimerkki

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y'$$

Ratkaisuyrite

Muotoa

$$f(x,y) + g(x,y)y' = 0$$

oleva DY:tä voidaan yrittää tulkita muodossa

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}F(x,y) = 0,$$

Eksaktit DY:t

Esimerkki

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y'$$

Ratkaisuyrite

Muotoa

$$f(x,y) + g(x,y)y' = 0$$

oleva DY:tä voidaan yrittää tulkita muodossa

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}F(x,y) = 0,$$

jonka ratkaisu on

$$F(x,y) = C.$$

Eksaktit DY:t

Lause

Jos funktiot f ja g ovat riittävän säännöllisiä, funktio $F(x, y)$, jolle $\frac{\partial F}{\partial x} = f(x, y)$ ja $\frac{\partial F}{\partial y} = g(x, y)$ on olemassa tarkalleen silloin kun

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Eksaktit DY:t

Lause

Jos funktiot f ja g ovat riittävän säännöllisiä, funktio $F(x, y)$, jolle $\frac{\partial F}{\partial x} = f(x, y)$ ja $\frac{\partial F}{\partial y} = g(x, y)$ on olemassa tarkalleen silloin kun

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Määritelmä

Differentiaaliyhtälö

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0$$

on eksakti, jos $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ (ja f ja g ovat riittävän säännöllisiä).

Eksaktit DY:t

Eksaktin DY:n ratkaiseminen

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0$$

Eksaktin DY:n ratkaiseminen

$$
\begin{aligned}
& f(x,y) + g(x,y)y' = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0
\end{aligned}
$$

Eksaktin DY:n ratkaiseminen

$$
\begin{aligned}
& f(x,y) + g(x,y)y' = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{d}{dx} F(x,y) = 0
\end{aligned}
$$

Eksaktin DY:n ratkaiseminen

$$
\begin{aligned}
& f(x,y) + g(x,y)y' = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{d}{dx} F(x,y) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & F(x,y) = C
\end{aligned}
$$

Huomautus

Jos yhtälö

$$f(x,y) + g(x,y)y' = 0$$

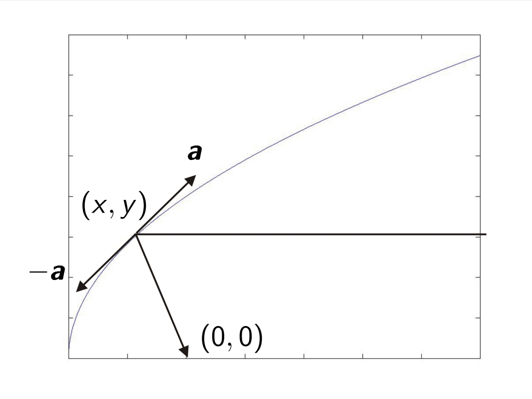
ei ole eksakti, on toisinaan mahdollista löytää funktio $\mu(x,y)$ (ns. integroiva tekijä), jolla kerrottuna yhtälö

$$f(x,y)\mu(x,y) + g(x,y)\mu(x,y)y' = 0$$

on eksakti.

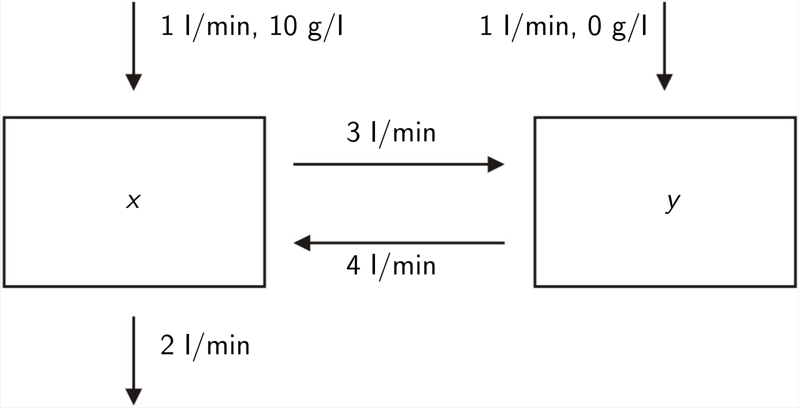
Mallintamistehtävä

Etsittävä yhtälö sellaiselle käyrälle, joka heijastaa x-akselin suuntaiset säteet origoon.



Esimerkki

Säiliöiden tilavuus 20 l, alkuehdot $x(0) = y(0) = 10$ (grammoina)



DY-ryhmät

Kemialliset reaktiot

$$2NO_2 \xrightarrow{k_1} NO + NO_3$$
$$NO_3 + CO \xrightarrow{k_2} NO_2 + CO_2$$

Kemialliset reaktiot

$$2NO_2 \xrightarrow{k_1} NO + NO_3$$
$$NO_3 + CO \xrightarrow{k_2} NO_2 + CO_2$$

$$\frac{d[NO_3]}{dt} = -k_2[NO_3][CO] + k_1[NO_2]^2$$

Kemialliset reaktiot

$$2NO_2 \xrightarrow{k_1} NO + NO_3$$
$$NO_3 + CO \xrightarrow{k_2} NO_2 + CO_2$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[NO_3]}{dt} &= -k_2[NO_3][CO] + k_1[NO_2]^2 \\
\frac{d[CO]}{dt} &= -k_2[NO_3][CO]
\end{aligned}$$

Kemialliset reaktiot

$$2NO_2 \xrightarrow{k_1} NO + NO_3$$
$$NO_3 + CO \xrightarrow{k_2} NO_2 + CO_2$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[NO_3]}{dt} &= -k_2[NO_3][CO] + k_1[NO_2]^2 \\
\frac{d[CO]}{dt} &= -k_2[NO_3][CO] \\
\frac{d[NO_2]}{dt} &= -2k_1[NO_2]^2 + k_2[NO_3][CO].
\end{aligned}$$

Kemialliset reaktiot

Merkitään $x = [NO_3]$, $y = [CO]$, $z = [NO_2]$, jolloin

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= -k_2xy + k_1z^2 \\ \dfrac{dy}{dt} &= -k_2xy \\ \dfrac{dz}{dt} &= -2k_1z^2 + k_2xy \end{cases}$$

DY-ryhmät

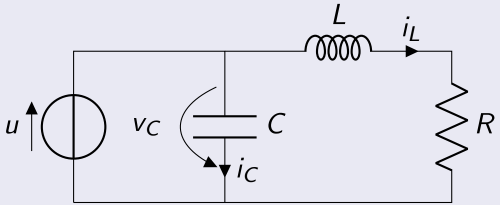
Kemialliset reaktiot

Merkitään $x = [NO_3]$, $y = [CO]$, $z = [NO_2]$, jolloin

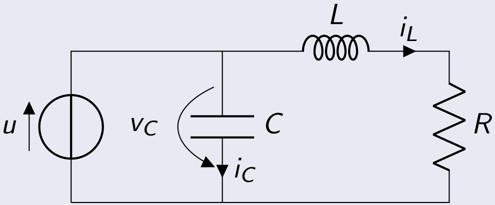
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = & -k_2xy + k_1z^2 \\ \frac{dy}{dt} & = & -k_2xy \\ \frac{dz}{dt} & = & -2k_1z^2 + k_2xy \end{cases}$$

Epälineaarinen DY-ryhmä.

RCL-piiri



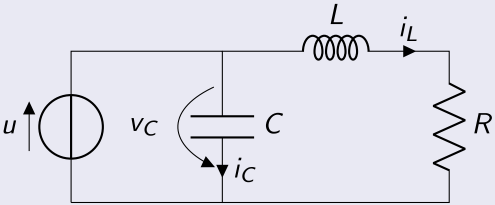
RCL-piiri



$$u = i_L + i_C = i_L + C\frac{dv_C}{dt}$$

$$L\frac{di_L}{dt} = v_C - Ri_L.$$

RCL-piiri



$$u = i_L + i_C = i_L + C\frac{dv_C}{dt}$$

$$L\frac{di_L}{dt} = v_C - Ri_L.$$

Jos merkitään $x_1 = v_C$ ja $x_2 = i_L$, saadaan

$$\begin{cases} C\frac{dx_1}{dt} & = & -x_2 + u \\ L\frac{dx_2}{dt} & = & x_1 - Rx_2 \end{cases}$$

RCL-piiri

Tällöin

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

DY-ryhmät

Lineaarinen, vakiokertoiminen DY-ryhmä

$$\begin{cases} x_1' & = & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ x_2' & = & a_{21}x_1 + \ldots + a_{2x}x_n + f_2(t) \\ & \vdots & \\ x_n' & = & a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases}$$

Abstrakti muoto: $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$. DY-ryhmä on *homogeeninen*, jos $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$.

DY-ryhmät

Lineaarinen, vakiokertoiminen DY-ryhmä

$$\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ x_2' &= a_{21}x_1 + \ldots + a_{2x}x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases}$$

Abstrakti muoto: $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$. DY-ryhmä on *homogeeninen*, jos $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$. Tulkinta: Piste $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ riippuu ajasta t, liikkeen määrää ylläoleva DY-ryhmä

DY-ryhmät

Lineaarinen, vakiokertoiminen DY-ryhmä

$$\begin{cases} x_1' & = & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ x_2' & = & a_{21}x_1 + \ldots + a_{2x}x_n + f_2(t) \\ & \vdots & \\ x_n' & = & a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases}$$

Abstrakti muoto: $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$. DY-ryhmä on *homogeeninen*, jos $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$. Tulkinta: Piste $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ riippuu ajasta t, liikkeen määrää ylläoleva DY-ryhmä (alkuehtoineen).

DY-ryhmät

Lineaarinen, vakiokertoiminen DY-ryhmä

$$\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ x_2' &= a_{21}x_1 + \ldots + a_{2x}x_n + f_2(t) \\ & \vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases}$$

Abstrakti muoto: $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$. DY-ryhmä on *homogeeninen*, jos $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$. Tulkinta: Piste $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ riippuu ajasta t, liikkeen määrää ylläoleva DY-ryhmä (alkuehtoineen).

Lause

Lineaarisen, vakiokertoimisen DY-ryhmän yleinen ratkaisu on muotoa

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{y}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{y}_n + \boldsymbol{y}_0,$$

missä $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_1$ ovat homogeenisen ryhmän ratkaisut ja $\boldsymbol{y}_0$ jokin ryhmän yksittäisratkaisu.

Huomautus

Monissa sovelluksissa $\boldsymbol{f}(t)$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\boldsymbol{f}(t) = B\boldsymbol{u}(t),$$

missä B on $n \times m$-matriisi ja $\boldsymbol{u}(t)$ $m \times 1$-vektori.

Huomautus

Monissa sovelluksissa $\boldsymbol{f}(t)$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\boldsymbol{f}(t) = B\boldsymbol{u}(t),$$

missä B on $n \times m$-matriisi ja $\boldsymbol{u}(t)$ $m \times 1$-vektori.

Tällöin

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$$

Ratkaisuidea (homogeeninen DY)

Etsittäessä reaalifunktiota x joka toteuttaa DY:n $x' = Ax$ ($A \in \mathbb{R}$) strategia on tunnettu:

$$x' = Ax$$

DY-ryhmät

Ratkaisuidea (homogeeninen DY)

Etsittäessä reaalifunktiota x joka toteuttaa DY:n $x' = Ax$ ($A \in \mathbb{R}$) strategia on tunnettu:

$$\begin{aligned} & x' = Ax \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x'}{x} = A \end{aligned}$$

Ratkaisuidea (homogeeninen DY)

Etsittäessä reaalifunktiota x joka toteuttaa DY:n $x' = Ax$ ($A \in \mathbb{R}$) strategia on tunnettu:

$$\begin{aligned} & x' = Ax \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x'}{x} = A \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{d}{dt} \ln x = A \end{aligned}$$

DY-ryhmät

Ratkaisuidea (homogeeninen DY)

Etsittäessä reaalifunktiota x joka toteuttaa DY:n $x' = Ax$ ($A \in \mathbb{R}$) strategia on tunnettu:

$$\begin{aligned} & x' = Ax \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x'}{x} = A \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{d}{dt} \ln x = A \\ \Leftrightarrow \quad & \ln x = At + C_0 \end{aligned}$$

Ratkaisuidea (homogeeninen DY)

Etsittäessä reaalifunktiota x joka toteuttaa DY:n $x' = Ax$ ($A \in \mathbb{R}$) strategia on tunnettu:

$$\begin{aligned} & x' = Ax \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x'}{x} = A \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{d}{dt} \ln x = A \\ \Leftrightarrow \quad & \ln x = At + C_0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = Ce^{At}, \end{aligned}$$

Ratkaisuidea (homogeeninen DY)

Etsittäessä reaalifunktiota x joka toteuttaa DY:n $x' = Ax$ ($A \in \mathbb{R}$) strategia on tunnettu:

$$
\begin{aligned}
& x' = Ax \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x'}{x} = A \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{d}{dt} \ln x = A \\
\Leftrightarrow \quad & \ln x = At + C_0 \\
\Leftrightarrow \quad & x = Ce^{At},
\end{aligned}
$$

missä $C = e^{C_0}$.

Laajennus

Reaalifunktioille siis DY:n $x' = Ax$ ratkaisu on $x = Ce^{At}$.

Laajennus

Reaalifunktioille siis DY:n $x' = Ax$ ratkaisu on $x = Ce^{At}$.

Voidaanko määritellä matriisin eksponenttifunktio e^{tA} siten, että derivaatan ominaisuudet olisivat lähes samat kuin skalaariarvoisille funktioille?

Homogeeninen ryhmä

DY-ryhmän

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$$

yleinen ratkaisu pitäisi olla muotoa $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$, missä $\boldsymbol{c}$ on vakiovektori.

DY-ryhmät

Homogeeninen ryhmä

DY-ryhmän

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$$

yleinen ratkaisu pitäisi olla muotoa $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$, missä $\boldsymbol{c}$ on vakiovektori. Tämä "nähdään" seuraavasti:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = \frac{d}{dt}e^{tA}\boldsymbol{c} = Ae^{tA}\boldsymbol{c} = A\boldsymbol{x},$$

Homogeeninen ryhmä

DY-ryhmän

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

yleinen ratkaisu pitäisi olla muotoa $\mathbf{x} = e^{tA}\mathbf{c}$, missä $\mathbf{c}$ on vakiovektori. Tämä "nähdään" seuraavasti:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \frac{d}{dt}e^{tA}\mathbf{c} = Ae^{tA}\mathbf{c} = A\mathbf{x},$$

mikä pitää paikkansa jos $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$.

Homogeeninen ryhmä

DY-ryhmän

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

yleinen ratkaisu pitäisi olla muotoa $\mathbf{x} = e^{tA}\mathbf{c}$, missä $\mathbf{c}$ on vakiovektori. Tämä "nähdään" seuraavasti:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \frac{d}{dt}e^{tA}\mathbf{c} = Ae^{tA}\mathbf{c} = A\mathbf{x},$$

mikä pitää paikkansa jos $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$.

Huomautus: $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$

Lineaariset DY-ryhmät

Tärkeä huomio:

Homogeenisen ryhmän ratkaisua $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ varten ei tarvitse laskea matriisia e^{tA}, vaan $e^{tA}\boldsymbol{c}$ voikin olla helpompi!

Tärkeä huomio:

Homogeenisen ryhmän ratkaisua $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ varten ei tarvitse laskea matriisia e^{tA}, vaan $e^{tA}\boldsymbol{c}$ voikin olla helpompi!

Idea

Jos $\boldsymbol{v}$ on matriisin A ominaisarvoon λ kuuluva yleistetty ominaisvektori, on

Tärkeä huomio:

Homogeenisen ryhmän ratkaisua $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ varten ei tarvitse laskea matriisia e^{tA}, vaan $e^{tA}\boldsymbol{c}$ voikin olla helpompi!

Idea

Jos $\boldsymbol{v}$ on matriisin A ominaisarvoon λ kuuluva yleistetty ominaisvektori, on

$$e^{tA}\boldsymbol{v} \quad =$$

Tärkeä huomio:

Homogeenisen ryhmän ratkaisua $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ varten ei tarvitse laskea matriisia e^{tA}, vaan $e^{tA}\boldsymbol{c}$ voikin olla helpompi!

Idea

Jos $\boldsymbol{v}$ on matriisin A ominaisarvoon λ kuuluva yleistetty ominaisvektori, on

$$e^{tA}\boldsymbol{v} = e^{t\lambda I + tA - t\lambda I}\boldsymbol{v}$$

Tärkeä huomio:

Homogeenisen ryhmän ratkaisua $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ varten ei tarvitse laskea matriisia e^{tA}, vaan $e^{tA}\boldsymbol{c}$ voikin olla helpompi!

Idea

Jos $\boldsymbol{v}$ on matriisin A ominaisarvoon λ kuuluva yleistetty ominaisvektori, on

$$e^{tA}\boldsymbol{v} \quad = \quad e^{t\lambda I + tA - t\lambda I}\boldsymbol{v} = e^{t\lambda I}e^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v}$$

Lineaariset DY-ryhmät

Tärkeä huomio:

Homogeenisen ryhmän ratkaisua $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ varten ei tarvitse laskea matriisia e^{tA}, vaan $e^{tA}\boldsymbol{c}$ voikin olla helpompi!

Idea

Jos $\boldsymbol{v}$ on matriisin A ominaisarvoon λ kuuluva yleistetty ominaisvektori, on

$$e^{tA}\boldsymbol{v} = e^{t\lambda I + tA - t\lambda I}\boldsymbol{v} = e^{t\lambda I}e^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v} = e^{\lambda t}Ie^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v}$$

Tärkeä huomio:

Homogeenisen ryhmän ratkaisua $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ varten ei tarvitse laskea matriisia e^{tA}, vaan $e^{tA}\boldsymbol{c}$ voikin olla helpompi!

Idea

Jos $\boldsymbol{v}$ on matriisin A ominaisarvoon λ kuuluva yleistetty ominaisvektori, on

$$\begin{aligned} e^{tA}\boldsymbol{v} &= e^{t\lambda I + tA - t\lambda I}\boldsymbol{v} = e^{t\lambda I}e^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v} = e^{\lambda t}Ie^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v} \\ &= e^{\lambda t}e^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

Tärkeä huomio:

Homogeenisen ryhmän ratkaisua $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ varten ei tarvitse laskea matriisia e^{tA}, vaan $e^{tA}\boldsymbol{c}$ voikin olla helpompi!

Idea

Jos $\boldsymbol{v}$ on matriisin A ominaisarvoon λ kuuluva yleistetty ominaisvektori, on

$$
\begin{aligned}
e^{tA}\boldsymbol{v} &= e^{t\lambda I + tA - t\lambda I}\boldsymbol{v} = e^{t\lambda I}e^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v} = e^{\lambda t}Ie^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v} \\
&= e^{\lambda t}e^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v} \\
&= e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(t(A-\lambda I))^k\boldsymbol{v}
\end{aligned}
$$

Lineaariset DY-ryhmät

Tärkeä huomio:

Homogeenisen ryhmän ratkaisua $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ varten ei tarvitse laskea matriisia e^{tA}, vaan $e^{tA}\boldsymbol{c}$ voikin olla helpompi!

Idea

Jos $\boldsymbol{v}$ on matriisin A ominaisarvoon λ kuuluva yleistetty ominaisvektori, on

$$
\begin{aligned}
e^{tA}\boldsymbol{v} &= e^{t\lambda I + tA - t\lambda I}\boldsymbol{v} = e^{t\lambda I}e^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v} = e^{\lambda t}Ie^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v} \\
&= e^{\lambda t}e^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v} \\
&= e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(t(A-\lambda I))^k\boldsymbol{v} \\
&= e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k\boldsymbol{v}
\end{aligned}
$$

Huomautus

Jos $\boldsymbol{v}$ on matriisin A (yleistetty) λ:aan liittyvä ominaisvektori, on $(A-\lambda I)^m \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ jostain rajasta m alkaen ja

$$e^{tA}\boldsymbol{v} = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k \boldsymbol{v}$$

Huomautus

Jos $\boldsymbol{v}$ on matriisin A (yleistetty) λ:aan liittyvä ominaisvektori, on $(A-\lambda I)^m \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ jostain rajasta m alkaen ja

$$e^{tA}\boldsymbol{v} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k \boldsymbol{v}$$

Jos erityisesti $\boldsymbol{v}$ on varsinainen ominaisvektori (siis yleistetty astetta $m=1$),

$$e^{tA}\boldsymbol{v} = e^{\lambda t}\boldsymbol{v}.$$

Yhteenveto

- Homogeenisen DY-ryhmän $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ ratkaisu on $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$.
- Etsitään matriisin A (yleistetyt) ominaisvektorit jotka muodostavat kannan. Tällöin voidaan esittää $\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{v}_n$

Yhteenveto

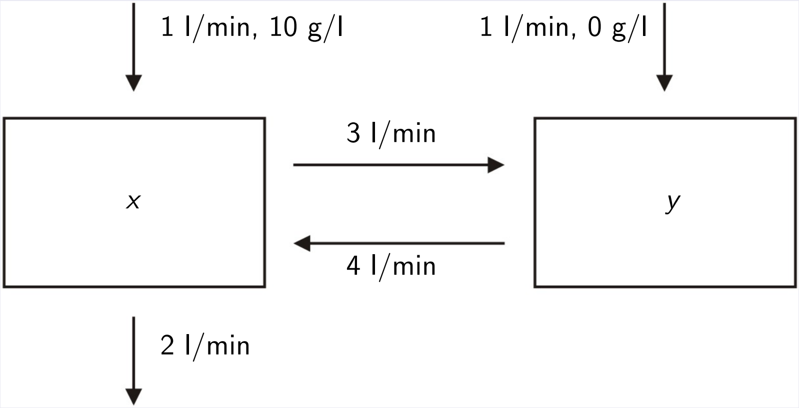
- Homogeenisen DY-ryhmän $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ ratkaisu on $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$.
- Etsitään matriisin A (yleistetyt) ominaisvektorit jotka muodostavat kannan. Tällöin voidaan esittää $\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{v}_n$
- $e^{tA}\boldsymbol{v_i}$ voidaan laskea esityksen $e^{tA}\boldsymbol{v}_i = e^{t\lambda I + tA - t\lambda I}\boldsymbol{v}_i = e^{\lambda t}e^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v}_i$ perusteella.

Yhteenveto

- Homogeenisen DY-ryhmän $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ ratkaisu on $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$.
- Etsitään matriisin A (yleistetyt) ominaisvektorit jotka muodostavat kannan. Tällöin voidaan esittää $\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{v}_n$
- $e^{tA}\boldsymbol{v_i}$ voidaan laskea esityksen $e^{tA}\boldsymbol{v}_i = e^{t\lambda I + tA - t\lambda I}\boldsymbol{v}_i = e^{\lambda t}e^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v}_i$ perusteella.
- Kertoimet $c_1, \ldots, c_n$ määräytyvät ehdon $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}(0)$ perusteella.

Esimerkki

Säiliöiden tilavuus 20 l, alkuehdot $x(0) = y(0) = 10$ (grammoina)



Esimerkki

$$\begin{cases} x' &= -5 \cdot \frac{x}{20} + 4 \cdot \frac{y}{20} + 10 \\ y' &= 3 \cdot \frac{x}{20} - 4 \cdot \frac{y}{20} \end{cases}$$

Esimerkki

$$\begin{cases} x' &= -5 \cdot \frac{x}{20} + 4 \cdot \frac{y}{20} + 10 \\ y' &= 3 \cdot \frac{x}{20} - 4 \cdot \frac{y}{20} \end{cases}$$

Homogeenisoitu DY-pari:

$$\begin{cases} x' &= -5 \cdot \frac{x}{20} + 4 \cdot \frac{y}{20} \\ y' &= 3 \cdot \frac{x}{20} - 4 \cdot \frac{y}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Esimerkki

$$\begin{cases} x' &= -5\cdot\frac{x}{20}+4\cdot\frac{y}{20}+10 \\ y' &= 3\cdot\frac{x}{20}-4\cdot\frac{y}{20} \end{cases}$$

Homogeenisoitu DY-pari:

$$\begin{cases} x' &= -5\cdot\frac{x}{20}+4\cdot\frac{y}{20} \\ y' &= 3\cdot\frac{x}{20}-4\cdot\frac{y}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Esimerkki

Matriisin A ominaisarvot:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{4}-\lambda & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Esimerkki

Matriisin A ominaisarvot:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{4}-\lambda & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-\frac{2}{5}, -\frac{1}{20}\}$$

Matriisin A ominaisvektorit

$$(A+\frac{2}{5}I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matriisin A ominaisvektorit

$$(A+\frac{2}{5}I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+\frac{1}{20}I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Homogeenisen yhtälön ratkaisu

$$\boldsymbol{x} = c_1 e^{-\frac{2}{5}t} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{20}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Homogeenisen yhtälön ratkaisu

$$\boldsymbol{x} = c_1 e^{-\frac{2}{5}t} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{20}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu

Yrite:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

(vakiovektori), jolloin saadaan

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$