Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Eksaktit DY:t

Eksaktin DY:n ratkaiseminen

$$
\begin{aligned}
& f(x,y) + g(x,y)y' = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{d}{dx} F(x,y) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & F(x,y) = C
\end{aligned}
$$

Huomautus

Jos yhtälö

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0$$

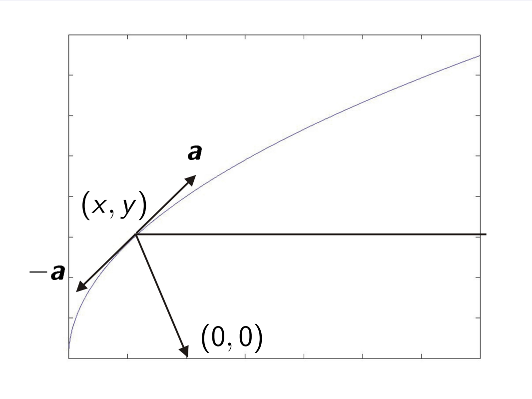
ei ole eksakti, on toisinaan mahdollista löytää funktio $\mu(x, y)$ (ns. integroiva tekijä), jolla kerrottuna yhtälö

$$f(x, y)\mu(x, y) + g(x, y)\mu(x, y)y' = 0$$

on eksakti.

Mallintamistehtävä

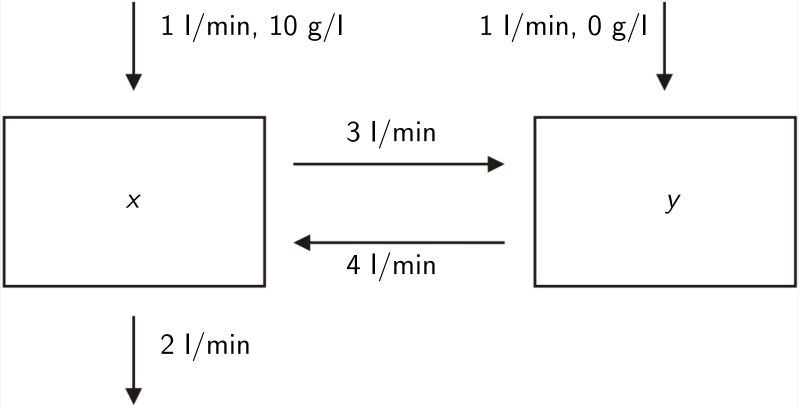
Etsittävä yhtälö sellaiselle käyrälle, joka heijastaa x-akselin suuntaiset säteet origoon.



DY-ryhmät

Esimerkki

Säiliöiden tilavuus 20 l, alkuehdot $x(0) = y(0) = 10$ (grammoina)



DY-ryhmät

Kemialliset reaktiot

$$2NO_2 \xrightarrow{k_1} NO + NO_3$$
$$NO_3 + CO \xrightarrow{k_2} NO_2 + CO_2$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[NO_3]}{dt} &= -k_2[NO_3][CO] + k_1[NO_2]^2 \\
\frac{d[CO]}{dt} &= -k_2[NO_3][CO] \\
\frac{d[NO_2]}{dt} &= -2k_1[NO_2]^2 + k_2[NO_3][CO].
\end{aligned}$$

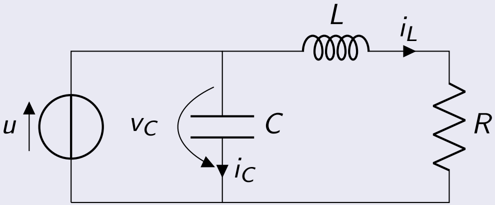
Kemialliset reaktiot

Merkitään $x = [NO_3]$, $y = [CO]$, $z = [NO_2]$, jolloin

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & -k_2xy + k_1z^2 \\ \dfrac{dy}{dt} & = & -k_2xy \\ \dfrac{dz}{dt} & = & -2k_1z^2 + k_2xy \end{cases}$$

Epälineaarinen DY-ryhmä.

RCL-piiri



$$u = i_L + i_C = i_L + C\frac{dv_C}{dt}$$

$$L\frac{di_L}{dt} = v_C - Ri_L.$$

Jos merkitään $x_1 = v_C$ ja $x_2 = i_L$, saadaan

$$\begin{cases} C\frac{dx_1}{dt} & = & -x_2 + u \\ L\frac{dx_2}{dt} & = & x_1 - Rx_2 \end{cases}$$

DY-ryhmät

RCL-piiri

Tällöin

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Lineaarinen, vakiokertoiminen DY-ryhmä

$$\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ x_2' &= a_{21}x_1 + \ldots + a_{2x}x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases}$$

Abstrakti muoto: $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$. DY-ryhmä on *homogeeninen*, jos $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$. Tulkinta: Piste $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ riippuu ajasta t, liikkeen määrää ylläoleva DY-ryhmä (alkuehtoineen).

Lause

Lineaarisen, vakiokertoimisen DY-ryhmän yleinen ratkaisu on muotoa

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{y}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{y}_n + \boldsymbol{y}_0,$$

missä $\boldsymbol{y}_1$, ..., $\boldsymbol{y}_1$ ovat homogeenisen ryhmän ratkaisut ja $\boldsymbol{y}_0$ jokin ryhmän yksittäisratkaisu.

Huomautus

Monissa sovelluksissa $\boldsymbol{f}(t)$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\boldsymbol{f}(t) = B\boldsymbol{u}(t),$$

missä B on $n \times m$-matriisi ja $\boldsymbol{u}(t)$ $m \times 1$-vektori.

Tällöin

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$$

Ratkaisuidea (homogeeninen DY)

Etsittäessä reaalifunktiota x joka toteuttaa DY:n $x' = Ax$ ($A \in \mathbb{R}$) strategia on tunnettu:

$$\begin{aligned} & x' = Ax \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x'}{x} = A \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{d}{dt} \ln x = A \\ \Leftrightarrow \quad & \ln x = At + C_0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = Ce^{At}, \end{aligned}$$

missä $C = e^{C_0}$.

Laajennus

Reaalifunktioille siis DY:n $x' = Ax$ ratkaisu on $x = Ce^{At}$.

Voidaanko määritellä matriisin eksponenttifunktio e^{tA} siten, että derivaatan ominaisuudet olisivat lähes samat kuin skalaariarvoisille funktioille?

Homogeeninen ryhmä

DY-ryhmän

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$$

yleinen ratkaisu pitäisi olla muotoa $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$, missä $\boldsymbol{c}$ on vakiovektori. Tämä "nähdään" seuraavasti:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = \frac{d}{dt}e^{tA}\boldsymbol{c} = Ae^{tA}\boldsymbol{c} = A\boldsymbol{x},$$

mikä pitää paikkansa jos $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$.

Huomautus: $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{c}$

Lineaariset DY-ryhmät

Tärkeä huomio:

Homogeenisen ryhmän ratkaisua $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ varten ei tarvitse laskea matriisia e^{tA}, vaan $e^{tA}\boldsymbol{c}$ voikin olla helpompi!

Idea

Jos $\boldsymbol{v}$ on matriisin A ominaisarvoon λ kuuluva yleistetty ominaisvektori, on

$$
\begin{aligned}
e^{tA}\boldsymbol{v} &= e^{t\lambda I + tA - t\lambda I}\boldsymbol{v} = e^{t\lambda I}e^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v} = e^{\lambda t}Ie^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v} \\
&= e^{\lambda t}e^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v} \\
&= e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(t(A-\lambda I))^k\boldsymbol{v} \\
&= e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k\boldsymbol{v}
\end{aligned}
$$

Huomautus

Jos $\boldsymbol{v}$ on matriisin A (yleistetty) λ:aan liittyvä ominaisvektori, on $(A - \lambda I)^m \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ jostain rajasta m alkaen ja

$$e^{tA}\boldsymbol{v} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda I)^k \boldsymbol{v}$$

Jos erityisesti $\boldsymbol{v}$ on varsinainen ominaisvektori (siis yleistetty astetta $m = 1$),

$$e^{tA}\boldsymbol{v} = e^{\lambda t}\boldsymbol{v}.$$

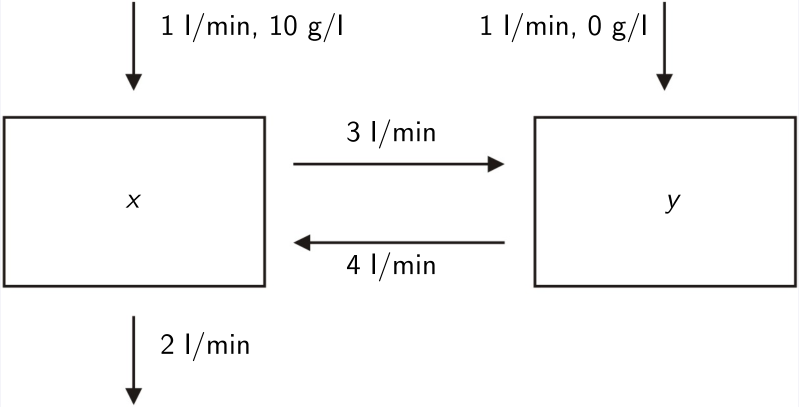
Lineaariset DY-ryhmät

Yhteenveto

- Homogeenisen DY-ryhmän $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ ratkaisu on $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$.
- Etsitään matriisin A (yleistetyt) ominaisvektorit jotka muodostavat kannan. Tällöin voidaan esittää $\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{v}_n$
- $e^{tA}\boldsymbol{v_i}$ voidaan laskea esityksen $e^{tA}\boldsymbol{v}_i = e^{t\lambda I + tA - t\lambda I}\boldsymbol{v}_i = e^{\lambda t}e^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v}_i$ perusteella.
- Kertoimet $c_1, \ldots, c_n$ määräytyvät ehdon $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}(0)$ perusteella.

Esimerkki

Säiliöiden tilavuus 20 l, alkuehdot $x(0) = y(0) = 10$ (grammoina)



Esimerkki

$$\begin{cases} x' &= -5\cdot\frac{x}{20}+4\cdot\frac{y}{20}+10 \\ y' &= 3\cdot\frac{x}{20}-4\cdot\frac{y}{20}\end{cases}$$

Homogeenisoitu DY-pari:

$$\begin{cases} x' &= -5\cdot\frac{x}{20}+4\cdot\frac{y}{20} \\ y' &= 3\cdot\frac{x}{20}-4\cdot\frac{y}{20}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Esimerkki

Matriisin A ominaisarvot:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{4}-\lambda & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-\frac{2}{5}, -\frac{1}{20}\}$$

Matriisin A ominaisvektorit

$$(A+\frac{2}{5}I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+\frac{1}{20}I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lineaariset DY-ryhmät

Homogeenisen yhtälön ratkaisu

$$\boldsymbol{x} = c_1 e^{-\frac{2}{5}t} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{20}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu

Yrite:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

(vakiovektori), jolloin saadaan

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Yksittäisratkaisu

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix}.$$

DY-parin ratkaisu on siis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{-\frac{2}{5}t} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{20}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix}$$

Alkuehdoista saadaan

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix},$$

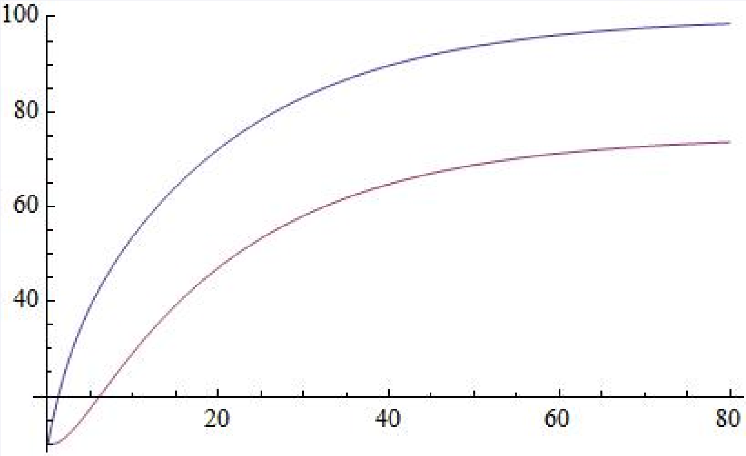
josta $(c_1, c_2) = (\frac{75}{7}, -\frac{530}{7})$.

Ratkaisu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{75}{5} e^{-\frac{2}{5}t} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{530}{7} e^{-\frac{1}{20}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix},$$

Lineaariset DY-ryhmät

Esimerkki



Epähomogeeninen tapaus

- Epähomogeenista DY-ryhmää $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$ varten pitää löytää yksittäisratkaisu.
- Tähän voidaan soveltaa vakion variointia: Homogeenisen ryhmän ratkaisu $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ tunnetaan, joten käytetään yritettä $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}(t)$, jolloin

$$\boldsymbol{x}' = Ae^{tA}\boldsymbol{c}(t) + e^{tA}\boldsymbol{c}'(t).$$

  Sijoittamalla tämä epähomogeeniseen yhtälöön saadaan

$$Ae^{tA}\boldsymbol{c}(t) + e^{tA}\boldsymbol{c}'(t) = Ae^{tA}\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{f},$$

  mikä sievenee muotoon

$$e^{tA}\boldsymbol{c}'(t) = \boldsymbol{f} \Leftrightarrow \boldsymbol{c}'(t) = e^{-tA}\boldsymbol{f}.$$

Epähomogeeninen DY-ryhmä

- Täten $\boldsymbol{c}(t) = \int e^{-tA}\boldsymbol{f}\,dt + \boldsymbol{c}$ ja
- $\boldsymbol{x} = e^{tA}\int e^{-tA}\boldsymbol{f}\,dt + e^{tA}\boldsymbol{c}$.