Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Epähomogeeninen tapaus

- Epähomogeenista DY-ryhmää $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$ varten pitää löytää yksittäisratkaisu.
- Tähän voidaan soveltaa vakion variointia: Homogeenisen ryhmän ratkaisu $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ tunnetaan, joten käytetään yritettä $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}(t)$, jolloin

$$\boldsymbol{x}' = Ae^{tA}\boldsymbol{c}(t) + e^{tA}\boldsymbol{c}'(t).$$

  Sijoittamalla tämä epähomogeeniseen yhtälöön saadaan

$$Ae^{tA}\boldsymbol{c}(t) + e^{tA}\boldsymbol{c}'(t) = Ae^{tA}\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{f},$$

  mikä sievenee muotoon

$$e^{tA}\boldsymbol{c}'(t) = \boldsymbol{f} \Leftrightarrow \boldsymbol{c}'(t) = e^{-tA}\boldsymbol{f}.$$

Epähomogeeninen DY-ryhmä

- Täten $\boldsymbol{c}(t) = \int e^{-tA}\boldsymbol{f}\,dt + \boldsymbol{c}$ ja
- $\boldsymbol{x} = e^{tA}\int e^{-tA}\boldsymbol{f}\,dt + e^{tA}\boldsymbol{c}$.

Homogeenisen yhtälön ratkaisu

$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ovat matriisin A ominaisvektorit.

Tällöin

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= e^{tA}(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) \\
&= c_1 e^{-\frac{2}{5}t}\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{20}t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_1 e^{-\frac{2}{5}t}(-\frac{4}{3}) + c_2 e^{-\frac{1}{20}t} \\ c_1 e^{-\frac{2}{5}t} + c_2 e^{-\frac{1}{20}t} \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{4}{3}e^{-\frac{2}{5}t} & e^{-\frac{1}{20}t} \\ e^{-\frac{2}{5}t} & e^{-\frac{1}{20}t} \end{pmatrix}}_{X(t)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = X(t)\boldsymbol{c}
\end{aligned}$$

Huomautus:

Olkoot

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad P = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tällöin

$$A = P \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{20} \end{pmatrix} P^{-1}$$

ja

$$\begin{aligned} e^{tA} &= P \begin{pmatrix} e^{-\frac{2}{5}t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{20}t} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{7}e^{-\frac{2}{5}t} + \frac{3}{7}e^{-\frac{1}{20}t} & -\frac{4}{7}e^{-\frac{2}{5}t} + \frac{4}{7}e^{-\frac{1}{20}t} \\ -\frac{3}{7}e^{-\frac{2}{5}t} + \frac{3}{7}e^{-\frac{1}{20}t} & \frac{3}{7}e^{-\frac{2}{5}t} + \frac{4}{7}e^{-\frac{1}{20}t} \end{pmatrix} \neq X(t) \end{aligned}$$

Homogeenisen yhtälön ratkaisu

Suoraan laskemalla voidaan todeta, että

$$\frac{d}{dt}X(t)\boldsymbol{c} = AX(t)\boldsymbol{c},$$

siis $\boldsymbol{x} = X(t)\boldsymbol{c}$ on homogeenisen DY:n ratkaisu

Lineaariset DY-ryhmät

Yksittäisratkaisu

- Epähomogeenista DY-ryhmää $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$ varten pitää löytää yksittäisratkaisu.
- Yksittäisratkaisun löytämiseen voidaan soveltaa vakion variointia: Jos homogeenisen ryhmän ratkaisu $\boldsymbol{x} = X(t)\boldsymbol{c}$ on tiedossa, käytetään yritettä $\boldsymbol{x} = X(t)\boldsymbol{c}(t)$, mikä johtaa DY-ryhmään $X(t)\boldsymbol{c}'(t) = \boldsymbol{f} \Leftrightarrow \boldsymbol{c}'(t) = X^{-1}(t)\boldsymbol{f}$.
- Näin ollen $\boldsymbol{c}(t) = \displaystyle\int X^{-1}(t)\boldsymbol{f}\,dt + \boldsymbol{c}$ ja
- $\boldsymbol{x} = X(t)\displaystyle\int X^{-1}(t)\boldsymbol{f}\,dt + X(t)\boldsymbol{c}$.
- Määräämätön integraali lasketaan jokaiselle koordinaatille erikseen.

Esimerkki

DY-parin

$$\begin{cases} x' &= -5\cdot\frac{x}{20}+4\cdot\frac{y}{20} \\ y' &= 3\cdot\frac{x}{20}-4\cdot\frac{y}{20} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Homogenisoidulle versiolle on saatu ratkaisu $\boldsymbol{x} = X(t)\boldsymbol{c}$, vakion variointi $\boldsymbol{x} = X(t)\boldsymbol{c}(t)$ johtaa yhtälöön

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}'(t) &= X^{-1}(t)\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7}e^{\frac{2}{5}t} & \frac{3}{7}e^{\frac{2}{5}t} \\ \frac{3}{7}e^{\frac{1}{20}t} & \frac{4}{7}e^{\frac{1}{20}t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{30}{7}e^{\frac{2}{5}t} \\ \frac{30}{7}e^{\frac{1}{20}t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esimerkki

Tästä saadaan

$$\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{150}{14} e^{\frac{2}{5}t} \\ \frac{3}{14} e^{\frac{1}{20}t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

ja edelleen ratkaisuna $\boldsymbol{x} = X(t)\boldsymbol{c}(t)$.

Laplace-muunnokset

Vakiokertoimisen lineaarisen DY-ryhmän

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$$

Laplace-muunnos: $s\boldsymbol{X} - \boldsymbol{x}(0) = A\boldsymbol{X} + B\boldsymbol{U}$, josta muodollisesti

$$\boldsymbol{X}(s) = (sI - A)^{-1}\boldsymbol{x}(0) + (sI - A)^{-1}B\boldsymbol{U}(s)$$

Käänteismunnos:

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-u)B\boldsymbol{u}(u)\,du,$$

missä $\Phi(t) = e^{tA}$.

Esimerkki

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

Matriisin ominaisarvot ovat -8 ja -2, sekä näitä vastaavat ominaisvektorit $(1, 1)$ ja $(-2, 1)$. Yleinen ratkaisu on siis

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = C_1 e^{-8t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Derivaattaoperaattori

Merkitään $D = \frac{d}{dx}$, jolloin $y' = Dy$, $y'' = D^2 y$, $y''' = D^3 y$, jne.
Esim. $(D + 1)(3D - 2)y = (3D^2 + D - 2)y = 3y'' + y' - 2y$

Esimerkki

DY-pari

$$\begin{cases} x' & = & 3x & -2y & +t \\ y' & = & 2x & -2y & +3e^t \end{cases}$$

voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{cases} (D-3)x & +2y & = & t \\ -2x & +(D+2)y & = & 3e^t \end{cases}$$

Kertomalla ylempi luvulla 2 ja alempi operaattorilla $D-3$ saadaan

$$\begin{cases} 2(D-3)x & +4y & = & 2t \\ (D-3)(-2x) & +(D-3)(D+2)y & = & (D-3)3e^t, \end{cases}$$

josta $(D^2-D-2)y = 2t-6e^t$.

Esimerkki

Operaattoriyhtälö $(D^2 - D - 2)y = 2t - 6e^t$ tarkoittaa tavallista differentiaaliyhtälöä

$$y'' - y' - 2y = 2t - 6e^t,$$

jonka yksittäisratkaisu voidaan löytää Laplace-muunnoksilla:

$$y = \frac{1}{2} - t + 3e^t$$

Funktio x saadaan sijoittamalla tämä ylempään DY:hyn.

Lineaariset järjestelmät

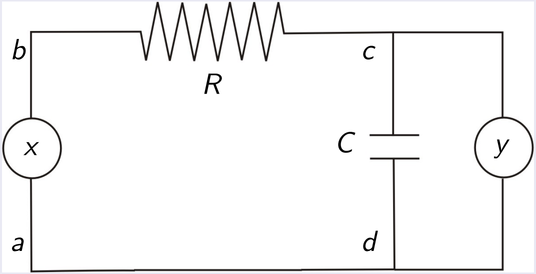
Lähtökohta

- Syöte $\boldsymbol{x}(t)$
- Tuloste $\boldsymbol{y}(t) = \mathcal{S}(\boldsymbol{x}(t))$
- Lineaarisuus
  $\mathcal{S}(a_1\boldsymbol{x}_1(t) + a_2\boldsymbol{x}_2(t)) = a_1\mathcal{S}(\boldsymbol{x}_1(t)) + a_2\mathcal{S}(\boldsymbol{x}_2(t))$.

Mahdollisia malleja

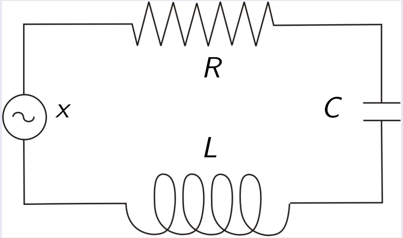
- $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, missä A on vakiomatriisi.
- Muuttuvatilainen systeemi, jossa tilavektori $\boldsymbol{s}$ toteuttaa yhtälön $\boldsymbol{s}' = A\boldsymbol{s} + B\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{s} + D\boldsymbol{x}$.

Esimerkki



$$x = RI + \frac{Q}{C} = RCy' + y$$

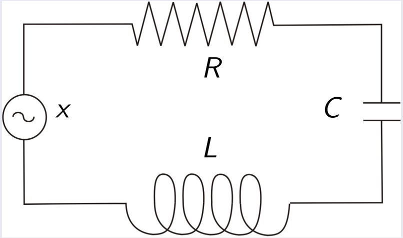
Esimerkki



Merkitään piirissä kulkevaa sähkövirtaa symbolilla $y = I$. Tällöin $x = RI + \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt}$ ja

$$x' = RI' + \frac{1}{C}I + L\frac{d^2I}{dt^2} = Ry' + \frac{1}{C}y + Ly''$$

Esimerkki



Jos taas kondensaattorin päiden välistä jännitettä merkitään symbolilla y, on $y = \frac{Q}{C}$ ja $I = C\frac{dU}{dt}$ ja yhtälö $x = RI + \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt}$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$x = RCy' + y + LCy''$$

Lineaariset järjestelmät

Määritelmä

Jos lineaarisen järjestelmän määrittää lineaarinen DY

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = x^{(m)} + b_{m-1}x^{(m-1)} + \ldots + b_0 x.$$

on järjestelmän *siirtofunktio* on $G(s) = Y(s)/X(s)$, missä Laplace-muunnokset on laskettu oletuksilla $0 = x(0) = x'(0) = x''(0) = \ldots = y(0) = y'(0) = y''(0) = \ldots$. Yllä olevasta yhtälöstä saadaan näillä oletuksilla

$$s^n Y + a_{n-1}s^{n-1}Y + \ldots a_0 Y = s^m X + b_{m-1}s^{m-1}X + \ldots + b_0 X,$$

josta

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0)Y = (s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0)X$$

Lineaariset järjestelmät

Siirtofunktio

Jos järjestelmää voidaan kuvata vakiokertoimisilla lineaarisilla differentiaaliyhtälöillä, on siirtofunktio $G(s)$ seuraavaa muotoa:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0}}_{G(s)} X(s)$$

Stabiilisuus

Määritelmä

Lineaarinen järjestelmä on *stabiili*, jos syötteen $x(t)$ ollessa rajoitettu on tuloste $y(t)$ (output) myös rajoitettu. Toisin sanoen: $|x(t)| \leq M_1 \rightarrow |y(t)| \leq M_2$.

Kriteeri

Jos $Y(s) = G(s)X(s)$, $y = \mathcal{L}^{-1}[Y]$, $g = \mathcal{L}^{-1}[G]$ ja $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X]$, on

$$y(t) = (g * x)(t) = \int_0^t g(u)x(t-u)\,du$$

Kriteeri

Jos $|x(t)| \leq M_1$, on

$$
\begin{aligned}
|y(t)| &= \left| \int_0^t g(u)x(t-u)\,du \right| \\
&\leq \int_0^t |g(u)x(t-u)|\,du \leq \int_0^t |g(u)| M_1\,du \\
&= M_1 \int_0^t |g(u)|\,du \leq M_1 \int_0^\infty |g(u)|\,du
\end{aligned}
$$

Jos

$$\int_0^\infty |g(u)|\,du < \infty,$$

on myös $y(t)$ rajoitettu. Voidaan osoittaa, että tämä on myös välttämätön ehto.

Impulssivaste

Impulssivaste tarkoittaa järjestelmän tulostetta kun syötteenä on Diracin delta-funktio. Syötteen ollessa $x(t) = \delta(t)$ saadaan $y(t) = (g * \delta)(t) = g(t)$.

Johtopäätös

Lineaarinen järjestelmä on stabiili tarkalleen silloin sen impulssivasteelle $g(t)$ pätee

$$\int_0^\infty |g(t)|\, dt < \infty$$

Stabiilisuus

Askelvaste

Askelvaste tarkoittaa tulostetta, kun syötteenä on Heavisiden askelfunktio:

$$y(t) = (g * H)(t) = \int_0^t g(u)H(t-u)\,du = \int_0^t g(u)\,du.$$

Näin ollen impulssivaste on askelvasteen derivaatta.

Siirtofunktion hajotelma

Koska siirtofunktio

$$G(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

on rationaalifunktio, on sillä olemassa osamurtohajotelma

$$G(s) = a(s) + \frac{p(s)}{q(s)},$$

missä a on polynomi ja $\deg(p) < \deg(q)$. Käänteismuunnos $g(t)$ saadaan osamurtohajotelmasta.

Polynomien käänteismuunnos

Koska

$$\mathcal{L}[\delta(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t)\, dt = 1,$$

on $\mathcal{L}[\delta'(t)](s) = s$, $\mathcal{L}[\delta''(t)](s) = s^2$, jne.
Näin ollen polynomien käänteiset Laplace-muunnokset sisältävät delta-piikin derivaattoja eivätkä näiden integraalit ole rajoitettuja.

Käänteismuunnos

Jos $\deg(p) < \deg(q)$, on

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \sum_{c,\lambda,k} \frac{c}{(s-\lambda)^k},$$

missä c, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s-\lambda)^k}] = \frac{t^{k-1}}{(n-1)!} e^{\lambda t}$$

Huomautus

Jos $\lambda = \alpha + i\beta$, on

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t),$$

jonka itseisarvo kasvaa rajatta, jos $\alpha > 0$, mutta lähestyy nopeasti kohti nollaa, jos $\alpha < 0$. Tämän vuoksi integraali

$$\int_0^\infty t^{k-1} e^{\lambda} \, dt$$

suppenee tarkalleen silloin kun $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

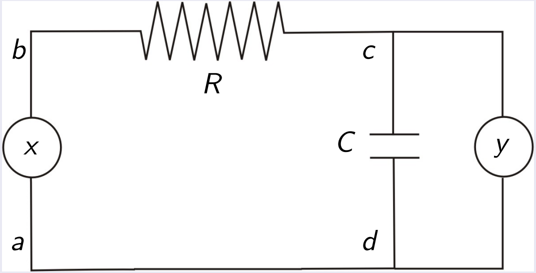
Määritelmä

Jos siirtofunktio $G(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ on rationaalinen ja supistettu siihen muotoon, että osoittajalla ja nimittäjällä ei ole yhteisiä nollakohtia, sanotaan nimittäjän nollakohtia *navoiksi*

Johtopäätös

Lineaarinen systeemi on stabiili tarkalleen silloin kun sen siirtofunktion napojen reaaliosat ovat negatiivisia.

Esimerkki



$$x = RI + \frac{Q}{C} = RCy' + y,$$

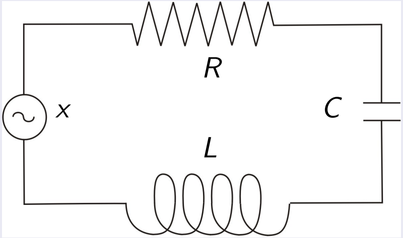
Josta $X(s) = RCsY(s) + Y(s) = (RCs + 1)Y(s)$ ja

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{RCs+1}}_{G(s)} X(s).$$

Esimerkki

Siirtofunktion ainoa napa on $s = -\frac{1}{RC} < 0$, joten systeemi on stabiili.

Esimerkki



Jos kondensaattorin päiden välistä jännitettä merkitään symbolilla y, on $y = \frac{Q}{C}$ ja $I = C\frac{dU}{dt}$ ja yhtälö $x = RI + \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt}$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$x = RCy' + y + LCy'',$$

Stabiilisuus

Esimerkki

Tästä

$$X = RCsY + Y + LCs^2 Y,$$

mistä nähdään että siirtofunktio on $G(S) = \frac{1}{LCs^2+RCs+1}$.
Siirtofunktion navat ovat

$$\frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC}.$$

Reaalisten parametriarvojen vuoksi $(RC)^2 - 4LC < (RC)^2$, joten tässäkin tapauksessa siirtofunktion nimittäjän nollakohtien reaaliosat ovat negatiiviset.