Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Näytepisteet

Jos $x(t)$ on jatkuva signaali, ja T näytteenottoväli, määritellään diskretisoitu signaali

$$x_D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT).$$

Näytepisteet

Jos $x(t)$ on jatkuva signaali, ja T näytteenottoväli, määritellään diskretisoitu signaali

$$x_D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT).$$

Tälle Laplace-muunnos on

$$\mathcal{L}[x_D(t)](s) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\mathcal{L}[\delta(t - nT)](s)$$

Näytepisteet

Jos $x(t)$ on jatkuva signaali, ja T näytteenottoväli, määritellään diskretisoitu signaali

$$x_D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT).$$

Tälle Laplace-muunnos on

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x_D(t)](s) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\mathcal{L}[\delta(t - nT)](s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-nTs} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n},\end{aligned}$$

Näytepisteet

Jos $x(t)$ on jatkuva signaali, ja T näytteenottoväli, määritellään diskretisoitu signaali

$$x_D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT).$$

Tälle Laplace-muunnos on

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x_D(t)](s) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\mathcal{L}[\delta(t - nT)](s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-nTs} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n},\end{aligned}$$

missä on merkitty $z = e^{sT}$.

Määritelmä

Jonon $x_0, x_1, x_2, \dots$ Z-muunnos on

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}.$$

Määritelmä

Jonon x_0, x_1, x_2, ... Z-muunnos on

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}.$$

Funktion $x(s)$ Z-muunnos on jonon $x_n = x(nT)$ ($n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$) Z-muunnos kun T on kiinnitetty.

Määritelmä

Jonon $x_0, x_1, x_2, \ldots$ Z-muunnos on

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}.$$

Funktion $x(s)$ Z-muunnos on jonon $x_n = x(nT)$ $(n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\})$ Z-muunnos kun T on kiinnitetty.

Esimerkki

jonolle a^n on

$$\mathcal{Z}[a^n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

Diskreetit lineaariset järjestelmät

Määritelmä

Jonon $x_0, x_1, x_2, \ldots$ Z-muunnos on

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}.$$

Funktion $x(s)$ Z-muunnos on jonon $x_n = x(nT)$ $(n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\})$ Z-muunnos kun T on kiinnitetty.

Esimerkki

jonolle a^n on

$$\mathcal{Z}[a^n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{a}{z})^n$$

Määritelmä

Jonon $x_0, x_1, x_2, \ldots$ Z-muunnos on

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}.$$

Funktion $x(s)$ Z-muunnos on jonon $x_n = x(nT)$ $(n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\})$ Z-muunnos kun T on kiinnitetty.

Esimerkki

jonolle a^n on

$$\mathcal{Z}[a^n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{a}{z})^n = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}}$$

Määritelmä

Jonon $x_0, x_1, x_2, \ldots$ Z-muunnos on

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}.$$

Funktion $x(s)$ Z-muunnos on jonon $x_n = x(nT)$ ($n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$) Z-muunnos kun T on kiinnitetty.

Esimerkki

jonolle a^n on

$$\mathcal{Z}[a^n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{a}{z})^n = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a},$$

kun $|a| < |z|$.

Ominaisuuksia

Lineaarisuus:

$$\mathcal{Z}[\alpha f_n + \beta g_n](z) = \alpha \mathcal{Z}[f_n](z) + \beta \mathcal{Z}[g_n](z)$$

Ominaisuuksia

Lineaarisuus:

$$\mathcal{Z}[\alpha f_n + \beta g_n](z) = \alpha \mathcal{Z}[f_n](z) + \beta \mathcal{Z}[g_n](z)$$

Aikasiirto:

$$\mathcal{Z}[f_{n+1}](z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^{-n}$$

Ominaisuuksia

Lineaarisuus:

$$\mathcal{Z}[\alpha f_n + \beta g_n](z) = \alpha \mathcal{Z}[f_n](z) + \beta \mathcal{Z}[g_n](z)$$

Aikasiirto:

$$\mathcal{Z}[f_{n+1}](z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^{-n+1}$$

Ominaisuuksia

Lineaarisuus:

$$\mathcal{Z}[\alpha f_n + \beta g_n](z) = \alpha \mathcal{Z}[f_n](z) + \beta \mathcal{Z}[g_n](z)$$

Aikasiirto:

$$\mathcal{Z}[f_{n+1}](z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^{-n+1} = z \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^{-n}$$

Ominaisuuksia

Lineaarisuus:

$$\mathcal{Z}[\alpha f_n + \beta g_n](z) = \alpha \mathcal{Z}[f_n](z) + \beta \mathcal{Z}[g_n](z)$$

Aikasiirto:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[f_{n+1}](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^{-n+1} = z \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^{-n} \\ &= z(\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} - f_0)\end{aligned}$$

Ominaisuuksia

Lineaarisuus:

$$\mathcal{Z}[\alpha f_n + \beta g_n](z) = \alpha \mathcal{Z}[f_n](z) + \beta \mathcal{Z}[g_n](z)$$

Aikasiirto:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[f_{n+1}](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^{-n+1} = z \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^{-n} \\ &= z(\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} - f_0) = z\mathcal{Z}[f_n] - f_0 z,\end{aligned}$$

Ominaisuuksia

$$\mathcal{Z}[f_{n+2}](z) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} z^{-n}$$

Ominaisuuksia

$$\mathcal{Z}[f_{n+2}](z) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} z^{-n} = \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^{-n+2}$$

Ominaisuuksia

$$\mathcal{Z}[f_{n+2}](z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} z^{-n} = \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^{-n+2} = z^2 \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^{-n}$$

Ominaisuuksia

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}[f_{n+2}](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} z^{-n} = \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^{-n+2} = z^2 \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^{-n} \\
&= z^2 (\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} - f_1 z^{-1} - f_0)
\end{aligned}
$$

Ominaisuuksia

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}[f_{n+2}](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} z^{-n} = \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^{-n+2} = z^2 \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^{-n} \\
&= z^2 (\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} - f_1 z^{-1} - f_0) = z^2 \mathcal{Z}[f_n] - f_1 z - f_0 z^2,
\end{aligned}
$$

Ominaisuuksia

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}[f_{n+2}](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} z^{-n} = \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^{-n+2} = z^2 \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^{-n} \\
&= z^2 (\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} - f_1 z^{-1} - f_0) = z^2 \mathcal{Z}[f_n] - f_1 z - f_0 z^2,
\end{aligned}
$$

jne.

Differenssiyhtälöt

Määritellään $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$, jolloin

$$\Delta^2 y_n = y_{n-2} - y_{n+1} - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$

Diskreetit lineaariset järjestelmät

Differenssiyhtälöt

Määritellään $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$, jolloin

$$\Delta^2 y_n = y_{n-2} - y_{n+1} - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$

ja

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_n &= y_{n+3} - 2y_{n+2} + y_{n+1} - (y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n) \\ &= y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n\end{aligned}$$

Differenssiyhtälöt

Yhtälö

$$y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \ldots + a_0 y_n = x_{n+l} + b_{l-l}x_{n+l-1} + \ldots + b_0 x_0$$

Määrittää diskreetin lineaarisen järjestelmän.

Differenssiyhtälöt

Yhtälö

$$y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \ldots + a_0 y_n = x_{n+l} + b_{l-l}x_{n+l-1} + \ldots + b_0 x_0$$

Määrittää diskreetin lineaarisen järjestelmän.

Differenssiyhtälöt

Olettaen jonojen alkutermit nolliksi, $\mathcal{Z}$-muunnoksilla saadaan $Y(z) = G(z)X(z)$.

Diskreetit lineaariset järjestelmät

Differenssiyhtälöt

Yhtälö

$$y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \ldots + a_0 y_n = x_{n+l} + b_{l-l}x_{n+l-1} + \ldots + b_0 x_0$$

Määrittää diskreetin lineaarisen järjestelmän.

Differenssiyhtälöt

Olettaen jonojen alkutermit nolliksi, $\mathcal{Z}$-muunnoksilla saadaan $Y(z) = G(z)X(z)$. Stabiilisuusehtona on että funktion $G(z)$ navat toteuttavat $|z| < 1$.

Esimerkki

$x_0 = 1$, $x_{n+1} = \alpha x_n$.

Esimerkki: Fibonaccin luvut

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad F_0 = F_1 = 1,$$

Esimerkki: Fibonaccin luvut

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad F_0 = F_1 = 1,$$

josta Z-muunnokset laskemalla (ja merkitsemällä $\mathcal{Z}[F_n](z) = \widehat{F}_n(z)$) saadaan

$$z^2 \widehat{F}_n(z) - z - z^2 = z\widehat{F}_n(z) - z + \widehat{F}_n(z),$$

Esimerkki: Fibonaccin luvut

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad F_0 = F_1 = 1,$$

josta Z-muunnokset laskemalla (ja merkitsemällä $\mathcal{Z}[F_n](z) = \widehat{F}_n(z)$) saadaan

$$z^2\widehat{F}_n(z) - z - z^2 = z\widehat{F}_n(z) - z + \widehat{F}_n(z),$$

josta

$$(z^2 - z - 1)\widehat{F}_n(z) = z^2$$

Esimerkki: Fibonaccin luvut

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad F_0 = F_1 = 1,$$

josta Z-muunnokset laskemalla (ja merkitsemällä $\mathcal{Z}[F_n](z) = \widehat{F}_n(z)$) saadaan

$$z^2\widehat{F}_n(z) - z - z^2 = z\widehat{F}_n(z) - z + \widehat{F}_n(z),$$

josta

$$(z^2 - z - 1)\widehat{F}_n(z) = z^2$$

ja

$$\widehat{F}_n(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}}$$

Esimerkki

Osamurtohajotelmilla (merk. $u = \frac{1}{z}$) saadaan

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_n(z) &= \frac{1}{1-u-u^2} \\
&= \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{u-\alpha} - \frac{1}{u-\beta}\right) \\
&= \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{\frac{1}{z}-\alpha} - \frac{1}{\frac{1}{z}-\beta}\right) \\
&= \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{z}{1-\alpha z} - \frac{z}{1-\beta z}\right) \\
&= \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\alpha^{-1}\frac{z}{\alpha^{-1}-z} - \beta^{-1}\frac{z}{\beta^{-1}-z}\right)
\end{aligned}$$

, missä $\alpha = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ja $\beta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Käänteinen Z-muunnos

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\beta-\alpha}(\alpha^{-1}\alpha^{-n}+\beta^{-1}\beta^{-n}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right). \end{aligned}$$

Eulerin menetelmä

$$y' = f(t, y).$$

Eulerin menetelmä

$$y' = f(t, y).$$

Funktion arvoja y_0, y_1, y_2, ... lasketaan aikoina t_0, $t_1 = t_0 + h$, $t_2 = t_0 + 2h$, ... $t_{i+1} = t_i + h$ siten että funktio y korvataan lineaarisella approksimaatiolla:

$$y_{i+1} = y_i + hy'(t_i) = y_i + h \cdot f(t_i, y_i).$$

Eulerin menetelmä

$$y' = f(t, y).$$

Funktion arvoja y_0, y_1, y_2, ... lasketaan aikoina t_0, $t_1 = t_0 + h$, $t_2 = t_0 + 2h$, ... $t_{i+1} = t_i + h$ siten että funktio y korvataan lineaarisella approksimaatiolla:

$$y_{i+1} = y_i + hy'(t_i) = y_i + h \cdot f(t_i, y_i).$$

Esimerkki

Differentiaaliyhtälölle $y' = y$ reunaehdolla $y_0 = y(0) = 1$ saadaan yhdellä kierroksella $y_1 = 1 + h$.

Runge-Kutta -menetelmä(t)

- $k_1 = f(t_i, y_i)h$
- $k_2 = f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1)$
- $k_3 = f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2)$
- $k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3)$
- $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

Runge-Kutta -menetelmä(t)

- $k_1 = f(t_i, y_i)h$
- $k_2 = f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1)$
- $k_3 = f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2)$
- $k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3)$
- $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

Esimerkki

Differentiaaliyhtälölle $y' = y$ reunaehdolla $y(0) = 1$ saadaan yhdellä kierroksella

$$y_1 = 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{24}h^4$$

Runge-Kutta -menetelmä(t)

- $k_1 = f(t_i, y_i)h$
- $k_2 = f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1)$
- $k_3 = f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2)$
- $k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3)$
- $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

Esimerkki

Differentiaaliyhtälölle $y' = y$ reunaehdolla $y(0) = 1$ saadaan yhdellä kierroksella

$$y_1 = 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{24}h^4 \approx e^h$$

Huomautus

Mainitut numeeriset menetelmät toimivat myös DY-ryhmille

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$$

Huomautus

Mainitut numeeriset menetelmät toimivat myös DY-ryhmille

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$$

Toisinaan voidaan uusia funktiolta lisäämällä pienentää differentiaaliyhtälöiden kertalukua.

Esimerkki

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$x'' + 2x' + 3x = 5t$$

voidaan sijoituksella $x' = y$ muuntaa DY-pariksi.

Esimerkki

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$x'' + 2x' + 3x = 5t$$

voidaan sijoituksella $x' = y$ muuntaa DY-pariksi. Tällöin siis $x'' = y'$, joten $y' + 2y + 3x = 5t$ ja $x' = y$,

Esimerkki

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$x'' + 2x' + 3x = 5t$$

voidaan sijoituksella $x' = y$ muuntaa DY-pariksi. Tällöin siis $x'' = y'$, joten $y' + 2y + 3x = 5t$ ja $x' = y$, josta yhtäpitävä DY-pari on

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -3x - 2y - 5t \end{cases}$$

Määritelmä

DY-pari

$$\begin{cases} x'(t) &= f_1(x, y) \\ y'(t) &= f_2(x, y) \end{cases}$$

on autonominen, jos muuttuja t ei esiinny oikean puolen termeissä.

Autonomiset DY-parit

Määritelmä

DY-pari

$$\begin{cases} x'(t) &= f_1(x,y) \\ y'(t) &= f_2(x,y) \end{cases}$$

on autonominen, jos muuttuja t ei esiinny oikean puolen termeissä.

Ratakäyrät

Autonomiselle parille on voimassa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}$$

Autonomiset DY-parit

Määritelmä

DY-pari

$$\begin{cases} x'(t) & = & f_1(x,y) \\ y'(t) & = & f_2(x,y) \end{cases}$$

on autonominen, jos muuttuja t ei esiinny oikean puolen termeissä.

Ratakäyrät

Autonomiselle parille on voimassa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}$$

Tämän differentiaaliyhtälön ratkaisuja sanotaan ratakäyriksi.

Ratakäyrät

Esimerkki

DY-pari

$$\begin{cases} x'(t) & = & x - y \\ y'(t) & = & x + y \end{cases}$$

on autonominen.

Esimerkki

DY-pari

$$\begin{cases} x'(t) &= x - y \\ y'(t) &= x + y \end{cases}$$

on autonominen. Ratakäyrien DY on

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$$

Esimerkki

DY-pari

$$\begin{cases} x'(t) & = & -2x^2 \\ y'(t) & = & -\frac{1}{2}xy \end{cases}$$

on autonominen. Alkuehdot $x(0) = 2$, $y(0) = 1$.

Lotka-Volterra -malli

Alfred J. Lotka (1880–1949)

Vito Volterra (1860–1940)

Lotka-Volterra -malli

Mallin DY-pari

$$\begin{cases} x'(t) &= \quad \alpha x - \beta xy \\ y'(t) &= -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

Mallin DY-pari

$$\begin{cases} x'(t) & = & \alpha x - \beta xy \\ y'(t) & = & -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

Tasapainopisteet: $(0,0)$ ja $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$

Mallin DY-pari

$$\begin{cases} x'(t) &= \alpha x - \beta xy \\ y'(t) &= -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

Tasapainopisteet: $(0,0)$ ja $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$

Ratakäyrien DY

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\frac{\delta x - \gamma}{\alpha - \beta y}$$

Lotka-Volterra -malli

Mallin DY-pari

$$\begin{cases} x'(t) &= \alpha x - \beta xy \\ y'(t) &= -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

Tasapainopisteet: $(0,0)$ ja $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$

Ratakäyrien DY

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\frac{\delta x - \gamma}{\alpha - \beta y}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha \ln y - \beta y = \delta x - \gamma \ln x + C$$

Lotka-Volterra -malli

Mallin DY-pari

$$\begin{cases} x'(t) &= \alpha x - \beta xy \\ y'(t) &= -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

Tasapainopisteet: $(0,0)$ ja $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$

Ratakäyrien DY

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\frac{\delta x - \gamma}{\alpha - \beta y} \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha \ln y - \beta y = \delta x - \gamma \ln x + C \end{aligned}$$

Ratkaisut syklisiä: On olemassa T, jolle $(x(T), y(T)) = (x(0), y(0))$.

Populaation keskiarvo

$$\begin{cases} x'(t) &= \alpha x - \beta xy \\ y'(t) &= -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

Populaation keskiarvo

$$\begin{cases} x'(t) &= \alpha x - \beta xy \\ y'(t) &= -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

Ylemmästä yhtälöstä saadaan

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \alpha - \beta y,$$

Populaation keskiarvo

$$\begin{cases} x'(t) &= \alpha x - \beta xy \\ y'(t) &= -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

Ylemmästä yhtälöstä saadaan

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \alpha - \beta y,$$

josta

$$0 = \ln \frac{x(T)}{x(0)} = \int_0^T \frac{x'}{x}\, dt = \int_0^T (\alpha - \beta y)\, dt = \alpha T - \beta \int_0^T y\, dt,$$

Populaation keskiarvo

$$\begin{cases} x'(t) & = & \alpha x - \beta xy \\ y'(t) & = & -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

Ylemmästä yhtälöstä saadaan

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \alpha - \beta y,$$

josta

$$0 = \ln \frac{x(T)}{x(0)} = \int_0^T \frac{x'}{x}\,dt = \int_0^T (\alpha - \beta y)\,dt = \alpha T - \beta \int_0^T y\,dt,$$

joten populaation y keskiarvo jakson T aikana on

$$\mathbb{E}(y) = \frac{1}{T}\int_0^T y\,dt = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Populaation keskiarvot

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(x) &= \frac{\gamma}{\delta} \\
\mathbb{E}(y) &= \frac{\alpha}{\beta}
\end{aligned}
$$

Lotka-Volterra -malli

Populaation keskiarvot

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x) &= \frac{\gamma}{\delta} \\ \mathbb{E}(y) &= \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

DY-pari + ulkopuolinen toimija

$$\begin{cases} x'(t) &= \alpha x - \beta xy - ex \\ y'(t) &= -\gamma y + \delta xy - ey \end{cases}$$

Lotka-Volterra -malli

Populaation keskiarvot

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(x) &= \frac{\gamma}{\delta}\\ \mathbb{E}(y) &= \frac{\alpha}{\beta}\end{aligned}$$

DY-pari + ulkopuolinen toimija

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x - \beta xy - ex \\ y'(t) = -\gamma y + \delta xy - ey \end{cases}$$

Uudet keskiarvot

$$\begin{cases} \mathbb{E}(x) = \frac{\gamma + e}{\delta} \\ \mathbb{E}(y) = \frac{\alpha - e}{\beta} \end{cases}$$

Sekalaisia menetelmiä

- $y' = f(y/x)$ muuttuu separoituvaksi sijoituksella $z = y/x$.

Sekalaisia menetelmiä

- $y' = f(y/x)$ muuttuu separoituvaksi sijoituksella $z = y/x$.
- $y' = f(ax + by)$ muuttuu separoituvaksi sijoituksella $z = ax + by$.

Sekalaisia menetelmiä

- $y' = f(y/x)$ muuttuu separoituvaksi sijoituksella $z = y/x$.
- $y' = f(ax + by)$ muuttuu separoituvaksi sijoituksella $z = ax + by$.
- Bernoullin DY $y' + p(x)y = q(x)y^a$ muuttuu lineaariseksi sijoituksella $z = y^{1-a}$ $(a \neq 1)$.

Sekalaisia menetelmiä

- $y' = f(y/x)$ muuttuu separoituvaksi sijoituksella $z = y/x$.
- $y' = f(ax + by)$ muuttuu separoituvaksi sijoituksella $z = ax + by$.
- Bernoullin DY $y' + p(x)y = q(x)y^a$ muuttuu lineaariseksi sijoituksella $z = y^{1-a}$ $(a \neq 1)$.
- Käänteisfunktion ratkaiseminen: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$.

Sekalaisia menetelmiä

- $y' = f(y/x)$ muuttuu separoituvaksi sijoituksella $z = y/x$.
- $y' = f(ax + by)$ muuttuu separoituvaksi sijoituksella $z = ax + by$.
- Bernoullin DY $y' + p(x)y = q(x)y^a$ muuttuu lineaariseksi sijoituksella $z = y^{1-a}$ $(a \neq 1)$.
- Käänteisfunktion ratkaiseminen: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$.
- Eulerin DY $x^2y'' + pxy' + qy = f(x)$ muuttuu sijoituksella $x = e^t$, $y(x) = y_1(\ln x)$ vakiokertoimiseksi.

Yhtälö $y'' = f(y)$

$$y'' = f(y)$$

Yhtälö $y'' = f(y)$

$$
\begin{aligned}
& y'' = f(y) \\
\Leftrightarrow\quad & 2y''y' = 2f(y)y'
\end{aligned}
$$

Yhtälö $y'' = f(y)$

$$
\begin{aligned}
& y'' = f(y) \\
\Leftrightarrow\quad & 2y''y' = 2f(y)y' \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{d}{dx}(y')^2 = 2\frac{d}{dx}\int f(y)\,dy
\end{aligned}
$$

Yhtälö $y'' = f(y)$

$$
\begin{aligned}
& y'' = f(y) \\
\Leftrightarrow\quad & 2y''y' = 2f(y)y' \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{d}{dx}(y')^2 = 2\frac{d}{dx}\int f(y)\,dy \\
\Leftrightarrow\quad & (y')^2 = 2\int f(y)\,dy + C
\end{aligned}
$$

Yhtälö $y'' = f(y)$

$$\begin{aligned}
& y'' = f(y) \\
\Leftrightarrow\quad & 2y''y' = 2f(y)y' \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{d}{dx}(y')^2 = 2\frac{d}{dx}\int f(y)\,dy \\
\Leftrightarrow\quad & (y')^2 = 2\int f(y)\,dy + C \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{dy}{dx} = \sqrt{2\int f(y)\,dy + C}
\end{aligned}$$

Yhtälö $y'' = f(y)$

Liike painovoimakentässä

$$ma = -G\frac{mM}{s^2}$$

Yhtälö $y'' = f(y)$

Liike painovoimakentässä

$$ma = -G\frac{mM}{s^2} \Leftrightarrow ms'' = -G\frac{mM}{s^2}$$

Liike painovoimakentässä

$$ma = -G\frac{mM}{s^2} \Leftrightarrow ms'' = -G\frac{mM}{s^2}$$

Merkitään $k = GM$, jolloin saadaan

$$s'' = -\frac{k}{s^2}$$

Yhtälö $y'' = f(y)$

Liike painovoimakentässä

$$ma = -G\frac{mM}{s^2} \Leftrightarrow ms'' = -G\frac{mM}{s^2}$$

Merkitään $k = GM$, jolloin saadaan

$$s'' = -\frac{k}{s^2} \Leftrightarrow 2s's'' = -2\frac{k}{s^2}s'$$

Liike painovoimakentässä

$$ma = -G\frac{mM}{s^2} \Leftrightarrow ms'' = -G\frac{mM}{s^2}$$

Merkitään $k = GM$, jolloin saadaan

$$s'' = -\frac{k}{s^2} \Leftrightarrow 2s's'' = -2\frac{k}{s^2}s' \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(s')^2 = 2k\frac{d}{dt}\frac{1}{s}.$$

Yhtälö $y'' = f(y)$

Liike painovoimakentässä

$$ma = -G\frac{mM}{s^2} \Leftrightarrow ms'' = -G\frac{mM}{s^2}$$

Merkitään $k = GM$, jolloin saadaan

$$s'' = -\frac{k}{s^2} \Leftrightarrow 2s's'' = -2\frac{k}{s^2}s' \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(s')^2 = 2k\frac{d}{dt}\frac{1}{s}.$$

Integrointi antaa yhtälön $(s')^2 = \dfrac{2k}{s} + C$,

Liike painovoimakentässä

$$ma = -G\frac{mM}{s^2} \Leftrightarrow ms'' = -G\frac{mM}{s^2}$$

Merkitään $k = GM$, jolloin saadaan

$$s'' = -\frac{k}{s^2} \Leftrightarrow 2s's'' = -2\frac{k}{s^2}s' \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(s')^2 = 2k\frac{d}{dt}\frac{1}{s}.$$

Integrointi antaa yhtälön $(s')^2 = \dfrac{2k}{s} + C$, josta merkinnöillä $s(0) = s_0$, $v(0) = v_0$ saadaan $C = v_0^2 - \frac{2k}{s_0}$

Liike painovoimakentässä

$$ma = -G\frac{mM}{s^2} \Leftrightarrow ms'' = -G\frac{mM}{s^2}$$

Merkitään $k = GM$, jolloin saadaan

$$s'' = -\frac{k}{s^2} \Leftrightarrow 2s's'' = -2\frac{k}{s^2}s' \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(s')^2 = 2k\frac{d}{dt}\frac{1}{s}.$$

Integrointi antaa yhtälön $(s')^2 = \dfrac{2k}{s} + C$, josta merkinnöillä $s(0) = s_0$, $v(0) = v_0$ saadaan $C = v_0^2 - \frac{2k}{s_0}$ ja

$$s' = \sqrt{\frac{2k}{s} + v_0^2 - \frac{2k}{s_0}}.$$

Liike painovoimakentässä

$$ma = -G\frac{mM}{s^2} \Leftrightarrow ms'' = -G\frac{mM}{s^2}$$

Merkitään $k = GM$, jolloin saadaan

$$s'' = -\frac{k}{s^2} \Leftrightarrow 2s's'' = -2\frac{k}{s^2}s' \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(s')^2 = 2k\frac{d}{dt}\frac{1}{s}.$$

Integrointi antaa yhtälön $(s')^2 = \dfrac{2k}{s} + C$, josta merkinnöillä $s(0) = s_0$, $v(0) = v_0$ saadaan $C = v_0^2 - \frac{2k}{s_0}$ ja

$$s' = \sqrt{\frac{2k}{s} + v_0^2 - \frac{2k}{s_0}}. \quad \text{Separoituva!}$$

Liike painovoimakentässä

Koska $v = s'$, voidaan yhtälö

$$(s')^2 = 2\frac{k}{s} + v_0^2 - 2\frac{k}{s_0}$$

kirjoittaa muotoon

$$v^2 - 2\frac{GM}{s} = v_0^2 - 2\frac{GM}{s_0}$$

Liike painovoimakentässä

Koska $v = s'$, voidaan yhtälö

$$(s')^2 = 2\frac{k}{s} + v_0^2 - 2\frac{k}{s_0}$$

kirjoittaa muotoon

$$v^2 - 2\frac{GM}{s} = v_0^2 - 2\frac{GM}{s_0} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{s} = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{s_0}$$

Liike painovoimakentässä

Koska $v = s'$, voidaan yhtälö

$$(s')^2 = 2\frac{k}{s} + v_0^2 - 2\frac{k}{s_0}$$

kirjoittaa muotoon

$$v^2 - 2\frac{GM}{s} = v_0^2 - 2\frac{GM}{s_0} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{s} = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{s_0}$$

Energian säilymislaki:

$E = E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}} = \dfrac{1}{2}mv^2 - G\dfrac{Mm}{s}$ ei muutu.

Yhtälö $y'' = f(y)$

Liike painovoimakentässä

$$(s')^2 = 2\frac{k}{s} + v_0^2 - 2\frac{k}{s_0}$$

Yhtälö $y'' = f(y)$

Liike painovoimakentässä

$$(s')^2 = 2\frac{k}{s} + v_0^2 - 2\frac{k}{s_0}$$

Nopeus $v = s'$ ei saa koskaan arvoa 0, jos $v_0^2 - \frac{2k}{s_0} \geq 0$.

Yhtälö $y'' = f(y)$

Liike painovoimakentässä

$$(s')^2 = 2\frac{k}{s} + v_0^2 - 2\frac{k}{s_0}$$

Nopeus $v = s'$ ei saa koskaan arvoa 0, jos $v_0^2 - \frac{2k}{s_0} \geq 0$.
Näin käy, jos $v_0^2 \geq \frac{2k}{s_0} = \frac{2GM}{s_0}$.

Liike painovoimakentässä

$$(s')^2 = 2\frac{k}{s} + v_0^2 - 2\frac{k}{s_0}$$

Nopeus $v = s'$ ei saa koskaan arvoa 0, jos $v_0^2 - \frac{2k}{s_0} \geq 0$. Näin käy, jos $v_0^2 \geq \frac{2k}{s_0} = \frac{2GM}{s_0}$. Sijoittamalla $s_0 = 6,378 \cdot 10^6$ m (maan säde),

Liike painovoimakentässä

$$(s')^2 = 2\frac{k}{s} + v_0^2 - 2\frac{k}{s_0}$$

Nopeus $v = s'$ ei saa koskaan arvoa 0, jos $v_0^2 - \frac{2k}{s_0} \geq 0$.
Näin käy, jos $v_0^2 \geq \frac{2k}{s_0} = \frac{2GM}{s_0}$. Sijoittamalla $s_0 = 6,378 \cdot 10^6$ m (maan säde), $M = 5,9737 \cdot 10^{24}$ kg (maan massa)

Liike painovoimakentässä

$$(s')^2 = 2\frac{k}{s} + v_0^2 - 2\frac{k}{s_0}$$

Nopeus $v = s'$ ei saa koskaan arvoa 0, jos $v_0^2 - \frac{2k}{s_0} \geq 0$.
Näin käy, jos $v_0^2 \geq \frac{2k}{s_0} = \frac{2GM}{s_0}$. Sijoittamalla $s_0 = 6,378 \cdot 10^6$ m (maan säde), $M = 5,9737 \cdot 10^{24}$ kg (maan massa) ja $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$ (gravitaatiovakio)

Liike painovoimakentässä

$$(s')^2 = 2\frac{k}{s} + v_0^2 - 2\frac{k}{s_0}$$

Nopeus $v = s'$ ei saa koskaan arvoa 0, jos $v_0^2 - \frac{2k}{s_0} \geq 0$.
Näin käy, jos $v_0^2 \geq \frac{2k}{s_0} = \frac{2GM}{s_0}$. Sijoittamalla $s_0 = 6,378 \cdot 10^6$ m (maan säde), $M = 5,9737 \cdot 10^{24}$ kg (maan massa) ja $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$ (gravitaatiovakio) saadaan ehdoksi

$$v_0 \geq 11,19\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Liike painovoimakentässä

$$(s')^2 = 2\frac{k}{s} + v_0^2 - 2\frac{k}{s_0}$$

Nopeus $v = s'$ ei saa koskaan arvoa 0, jos $v_0^2 - \frac{2k}{s_0} \geq 0$.
Näin käy, jos $v_0^2 \geq \frac{2k}{s_0} = \frac{2GM}{s_0}$. Sijoittamalla $s_0 = 6,378 \cdot 10^6$ m (maan säde), $M = 5,9737 \cdot 10^{24}$ kg (maan massa) ja $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$ (gravitaatiovakio) saadaan ehdoksi

$$v_0 \geq 11,19\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \quad \text{(pakonopeus)}$$