Insinöörimatematiikka: Fourier-analyysi

Demonstraatio 2, 25.4.2024

1. Osoita, että raja-arvoa $\lim_{\tau \to \infty} \tau \operatorname{sinc}(\tau x)$ ei ole olemassa (äärellisenä) millekään luvulle $x \in \mathbb{R}$.

2. Olkoon $\alpha > 0$. Laske $\mathcal{F}[e^{-\alpha|x|}](y)$ suoraan Fourier-muunnoksen määritelmään perustuen. Vastaus: $\dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 y^2}$, mutta esitä yksityiskohdat ja perustelut.

3. Määritä
$$\mathcal{F}[\frac{1}{1+x^2}](y).$$
Ohje: Etsi edelliseen tehtävän, lineaarisuuden ja skaalausperiaatteen avulla sellainen funktio $f(x)$, jolle $\mathcal{F}[f(x)](y) = \frac{1}{1+y^2}$. Käytä lopuksi duaaliperiaatetta.

4. Määritellään Hermiten sisätulo seuraavasti:
$$(f, g) = \int_{\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$
Laske sisätulo $(e^{2\pi i f_1 x}, e^{2\pi i f_2 x})$ ja esitä se δ-funktion avulla. Ohje: Voit hyödyntää luennolla esiintyneitä δ-funktion esitystapoja.

5. Jos $F(y) = \mathcal{F}[f(x)](y)$ tunnetaan, mikä on $\mathcal{F}[xf(x)](y)$? Ohje: Vastaus löytyy esim. derivoimalla $F(y)$:n integraaliesitys. Toinen vaihtoehto on käyttää derivointiperiaattetta sekä duaaliperiaatetta. Vastaus: $\mathcal{F}[xf(x)](y) = \dfrac{F'(y)}{-2\pi i}$, mutta esitä perustelut.

6. Määritä $\mathcal{F}[x](y)$. Ohje: Käytä tietoa $\mathcal{F}[1](y) = \delta(y)$, Fourier-muunnosten ominaisuuksia, sekä aiempien tehtävien tuloksia.

7. Oletetaan, että $f(x)$ toteuttaa yhtälön $f'(x) = -2\pi x f(x)$. Osoita että myös $f(x)$:n Fourier-muunnos $F(y)$ toteuttaa samanlaisen yhtälön. Ohje: Käytä derivointiperiaatetta ja aiemman tehtävän tulosta.

8. Osoita, että funktio $f(x) = e^{-\pi x^2}$ toteuttaa yhtälön $f'(x) = -2\pi x f(x)$. Oletetaan, että myös funktio $g(x)$ toteuttaa yhtälön $g'(x) = -2\pi x g(x)$. Laske
$$\frac{d}{dx}\frac{g(x)}{e^{-\pi x^2}}.$$
Mitä voit päätellä tuloksesta?

9. Olkoon H Heavisiden funktio (kts. luentomoniste). Varmista että kaava
$$\Pi(x) = H(x + \frac{1}{2}) - H(x - \frac{1}{2})$$
pitää paikkansa. Laske tämän jälkeen kaavan kummankin puolen Fourier-muunnokset käyttämällä oikealla puolella lineaarisuutta ja aikasiirtoa. Merkitse funktion H Fourier-muunnosta $\widehat{H}$:lla. Minkä lausekkeen saat näin $\widehat{H}$:lle?