Insinöörimatematiikka: Fourier-analyysi

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Fourier-sarjat

Tulkintaa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T}x} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2\pi n}{T}x + B_n \sin \frac{2\pi n}{T}x \right)$$

Funktion f Fourier-sarjassa esiintyy perustaajuus $f = \frac{1}{T}$ ja sen kaikki kokonaislukumonikerrat $\frac{2}{T}$, $\frac{3}{T}$, ... (jos kertoimet $\neq 0$). Taajuus $\frac{n}{T}$ esiintyy amplitudeilla $F_{\pm n}$ (vaihtoehtoisesti: amplitudeilla A_n ja B_n)

Yleistys

Taajuuksien $\frac{1}{T}$, $\frac{2}{T}$, $\frac{3}{T}$, ... sijasta kaikki reaaliluvut $f \in [0, \infty)$.

Fourier-integraalit

Määritelmä

Funktion $f(x)$ esitystä

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{2\pi iyx}\,dy$$

sanotaan Fourier'n integraaliksi ja $F(y)$:tä funktion f spektriksi.

Huomautus

Analogisesti Fourier-sarjojen kanssa, määritellään Fourier-analyysissa kahteen suuntaan ääretön integraali (poikkeuksellisesti) Cauchyn pääarvona:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} f(x)\,dx$$

Fourier-integraalit

Tulkinta

Fourier'n integraalissa

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi i y x}\, dy$$

funktio f on esitetty y-taajuisten eksponenttifunktioiden $e^{2\pi i y x}$ "summana". Kertoimia $F(y)$ ja $F(-y)$ sanotaan taajuuden $y \geq 0$ amplitudeiksi.

Lause

Olkoon funktio f sellainen, että integraali $\int_{-\infty}^{\infty} |f|$ on äärellisenä olemassa ja että f:llä on vain äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia äärellisillä väleillä. Tällöin f voidaan epäjatkuvuuskohtia lukuunottamatta esittää Fourier'n integraalina

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi iyx}\, dy,$$

missä

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi ixy}\, dx.$$

Määritelmä

Funktion f Fourier-muunnoksella tarkoitetaan funktion f spektriä F esityksessä

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi i y x}\, dy$$

ja merkitään

$$F(y) = \mathcal{F}[f](y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x y}\, dx.$$

Fourier-integraalit

Huomautus

Jos $F(y)$ on funktion $f(x)$ spektri, siis

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi iyx}\, dy,$$

on

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi ixy}\, dx,$$

mikä merkitsee sitä, että funktion $F(-y)$ spektri on $f(x)$.

Määritelmä

Funktion F käänteisellä Fourier-muunnoksella tarkoitetaan seuraavaa:

$$\mathcal{F}^{-1}[F](y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi ixy}\, dx$$

Lause

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[f] = f$$

Vaihtoehtoiset merkinnät

$$F = \mathcal{F}[f] = \hat{f}$$

Huomautus

Useissa sovelluksissa f kuvaa fysikaalisen suureen esittämää signaalia, jolloin muuttujasta käytetään merkintää t (aika). Tällöin funktion f graafisesta esityksestä (tai joskus myös funktiosta f) käytetään nimitystä aikataso.
Signaalin spektrin muuttujasta käytetään merkintää f (frekvenssi eli taajuus). Spektrin graafisesta esityksesta (tai joskus myös spektristä) käytetään nimitystä taajuustaso.

Määritelmiä

Määritelmä

Jos $F(y)$ on funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ spektri, ja

$$F(y) = |F(y)|\, e^{i\theta(y)}$$

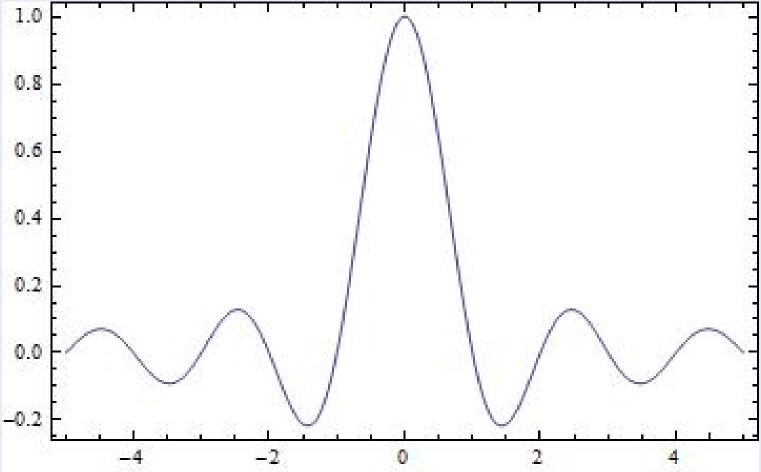
sen napakoordinaattiesitys, sanotaan, että $|F(y)|$ on amplitudispektri ja $\theta(y)$ vaihespektri.

Määritelmä

$$\operatorname{sinc} x = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\pi x}, & \text{jos } x \neq 0 \\ 1, & \text{jos } x = 0 \end{cases}$$

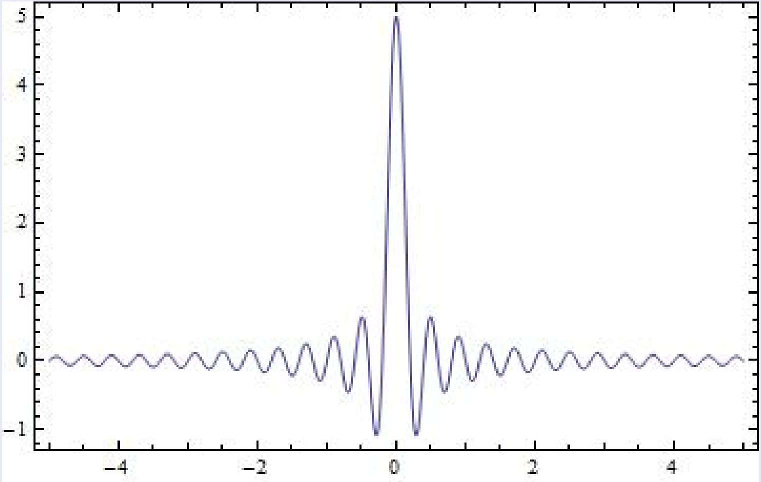
Sinc-funktio

$\tau \operatorname{sinc} \tau x$, $\tau = 1$



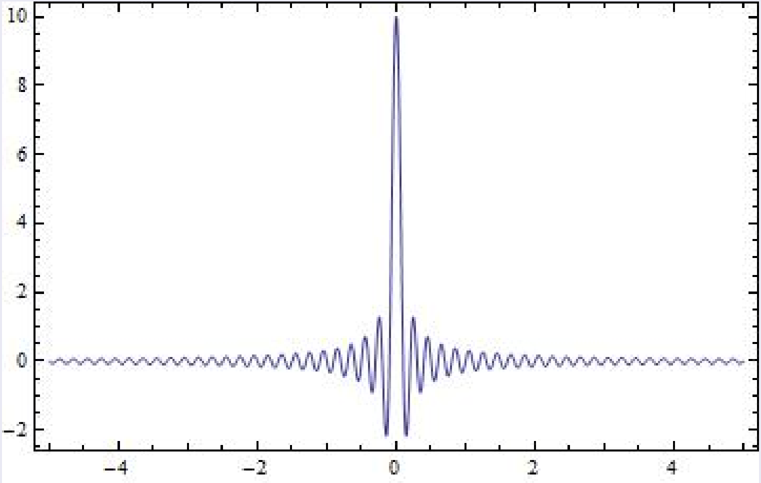
Sinc-funktio

$\tau \operatorname{sinc} \tau x,\ \tau = 5$



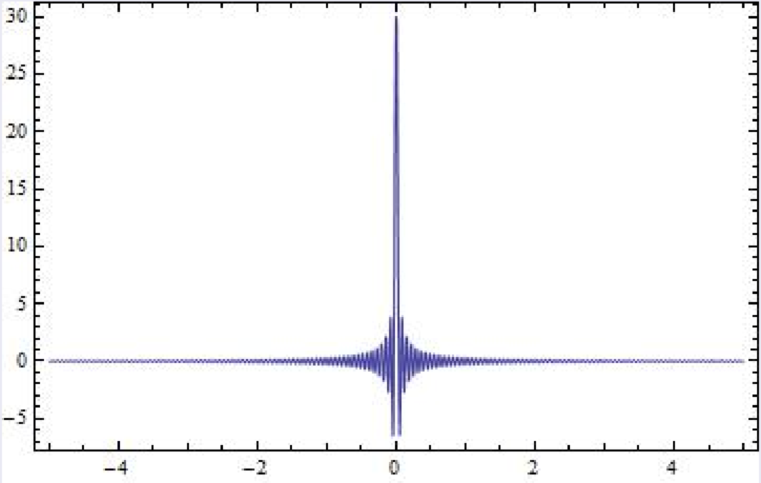
Sinc-funktio

$\tau \operatorname{sinc} \tau x$, $\tau = 10$



Sinc-funktio

$\tau \operatorname{sinc} \tau x$, $\tau = 30$



Pulssifunktio

Määritelmä

Pulssifunktio

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{kun } |x| = \frac{1}{2} \\ 0, & \text{kun } |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Esimerkki 42

$$\mathcal{F}[\Pi](y) = \operatorname{sinc} y,$$

joten

$$\Pi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} y \cdot e^{2\pi ixy}\, dy.$$

Määritelmä

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{jos } x < 0, \\ 0, & \text{jos } x = 0, \\ 1, & \text{jos } x > 0. \end{cases}$$

Esimerkki

- $\mathcal{F}[\operatorname{sgn}](y)$ määritelmään perustuen
- Esimerkki 43
- "Sopimus": $\mathcal{F}[\operatorname{sgn}](y) = \dfrac{1}{i\pi y}$

Reaalinen muoto

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{2\pi ixy}\,dy\\ =\;&\int_{0}^{\infty}(A(y)\cos(2\pi xy)+B(y)\sin(2\pi xy))\,dy,\end{aligned}$$

missä

$$A(y)=F(y)+F(-y)\quad\text{ja}\quad B(y)=i(F(y)-F(-y))$$

Lause

Jos f on reaaliarvoinen, on $\overline{F(y)}=F(-y)$, mistä seuraa, että $A(y)$ ja $B(y)$ ovat reaalisia.

Amplitudi – vaihe -muoto

Jos f on reaaliarvoinen, on

$$f(x) = 2\int_0^\infty |F(y)| \cos(2\pi xy + \theta(y))\, dy.$$

Lisäksi

$$F(-y) = \overline{F(y)} = \overline{|F(y)|\, e^{i\theta(y)}} = |F(y)|\, e^{-i\theta(y)}$$

ja

$$F(-y) = |F(-y)|\, e^{i\theta(-y)} = \left|\overline{F(y)}\right| e^{i\theta(-y)} = |F(y)|\, e^{i\theta(-y)}.$$

Täten reaaliarvoisille funktioille f on myös $\theta(-y) = -\theta(y)$.

Jos $F(y) = \mathcal{F}[f(x)](y)$, on

- Lineaarisuus: $\mathcal{F}[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2] = \alpha_1 \mathcal{F}[f_1] + \alpha_2 \mathcal{F}[f_2]$
- Duaalisuusperiaate: $\mathcal{F}[F](x) = f(-x)$
- Kompleksinen modulaatio eli taajuussiirto: $\mathcal{F}[f(x)e^{2\pi i y_0 x}](y) = F(y - y_0)$
- Aikasiirto: $\mathcal{F}[f(x - x_0)](y) = F(y)e^{-2\pi i x_0 y}$
- Skaalaus: Jos $\alpha > 0$, on $\mathcal{F}[f(\alpha x)](y) = \frac{1}{\alpha} F(\frac{y}{\alpha})$
- Derivointi: $\mathcal{F}[f'(x)](y) = 2\pi i y F(y)$
- Parsevalin kaava: Olkoon $G(y) = \mathcal{F}[g(x)](y)$. Tällöin

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\overline{G(y)}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$