Insinöörimatematiikka: Fourier-analyysi

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Fourier-muunnosten ominaisuuksia

Jos $F(y) = \mathcal{F}[f(x)](y)$, on

- Lineaarisuus: $\mathcal{F}[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2] = \alpha_1 \mathcal{F}[f_1] + \alpha_2 \mathcal{F}[f_2]$
- Duaalisuusperiaate: $\mathcal{F}[F](x) = f(-x)$
- Kompleksinen modulaatio eli taajuussiirto: $\mathcal{F}[f(x)e^{2\pi i y_0 x}](y) = F(y - y_0)$
- Aikasiirto: $\mathcal{F}[f(x - x_0)](y) = F(y)e^{-2\pi i x_0 y}$
- Skaalaus: Jos $\alpha > 0$, on $\mathcal{F}[f(\alpha x)](y) = \frac{1}{\alpha} F(\frac{y}{\alpha})$
- Derivointi: $\mathcal{F}[f'(x)](y) = 2\pi i y F(y)$
- Parsevalin kaava: Olkoon $G(y) = \mathcal{F}[g(x)](y)$. Tällöin

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\overline{G(y)}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

Fourier-muunnokset

Esimerkki

τ-levyinen pulssifunktio ($\tau > 0$)

$$\Pi(\frac{x}{\tau}) = \begin{cases} 1, & \text{jos } |x| < \frac{\tau}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{jos } |x| = \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{jos } |x| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[\Pi(\frac{x}{\tau})](y) = \tau \operatorname{sinc}(\tau y)$$

Katkaistu f-taajuinen eksponenttifunktio

$$\Pi(\frac{x}{\tau})e^{2\pi i f x} = \begin{cases} e^{2\pi i f x}, & \text{jos } |x| < \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{jos } |x| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[\Pi(\frac{x}{\tau})e^{2\pi i f x}](y) = \tau \operatorname{sinc}(\tau(y - f))$$

f-taajuisten eksponenttifunktioiden esitys

Onko

$$e^{2\pi ifx} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_f(y) e^{2\pi ixy}\, dy$$

jollekin funktiolle δ_f ?
Pitäisi olla

$$\delta_f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ifx} e^{-2\pi ixy}\, dx.$$

Ei suppene.

Lause

Funktiota $e^{2\pi ifx}$ ei voi esittää Fourier'n integraalina

$$e^{2\pi ifx} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_f(y) e^{2\pi ixy}\, dy,$$

missä δ_f on funktio $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Huomautus

Esitys Fourier-sarjana on yksinkertainen:

$$e^{2\pi ifx} = e^{2\pi ifx}.$$

Katkaistu f-taajuinen eksponenttifunktio

Koska

$$\mathcal{F}[\Pi(\frac{x}{\tau})e^{2\pi i f x}](y) = \tau\,\mathrm{sinc}(\tau(y-f)),$$

on

$$\Pi(\frac{x}{\tau})e^{2\pi i f x} = \int_{-\infty}^{\infty} \tau\,\mathrm{sinc}(\tau(y-f))e^{2\pi i x y}\,dy.$$

Johtaa korkeaan "spektripiikkiin" kohdassa $y = f$, kun τ on suuri.

Diracin δ-funktio

"Määritelmä"

- $\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x \neq 0 \\ \infty, & \text{jos } x = 0 \end{cases}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y - y_0) F(y)\, dy = F(y_0)$
- Kuvaaja: Nuoli pystyakselin suuntaan.

f-taajuinen eksponenttifunktio

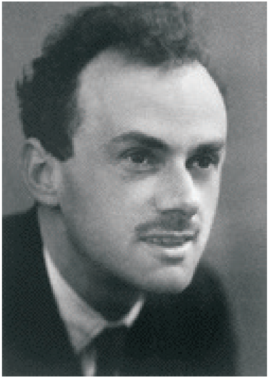
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y - f) e^{2\pi ixy}\, dy = e^{2\pi ifx},$$

siis

$$\mathcal{F}[e^{2\pi ifx}](y) = \delta(y - f),$$

Erityisesti $\mathcal{F}[1](y) = \delta(y)$.

Diracin δ-funktio



Paul Dirac (1902–1984)

Diracin δ-funktio

Esitystapoja

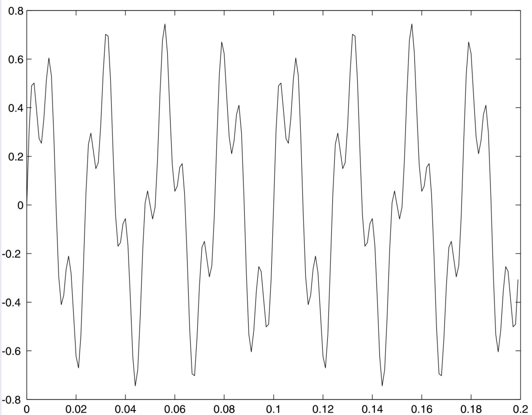
$$\begin{aligned}\delta(y) &= \mathcal{F}[1](y)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ixy}\,dx\\ &= \lim_{\tau\to\infty} \tau\,\mathrm{sinc}(\tau y)\end{aligned}$$

Esimerkki

$$\mathcal{F}[\sin 2\pi fx](y) = \mathcal{F}[\frac{1}{2i}(e^{2\pi ifx}-e^{-2\pi ifx})](y) = \frac{1}{2i}\delta(y-f)-\frac{1}{2i}\delta(y+f)$$

Diracin δ-funktio

Signaali: $\frac{1}{2}s_{40}(t) + \frac{1}{4}s_{130}(t)$



Diracin δ-funktio

Esimerkki

$$s(t) = \frac{1}{2}\sin(2\pi \cdot 40t) + \frac{1}{4}\sin(2\pi \cdot 130t),$$

- $\mathcal{F}[s(t)](f)$?
- $|\mathcal{F}[s(t)](f)|$?

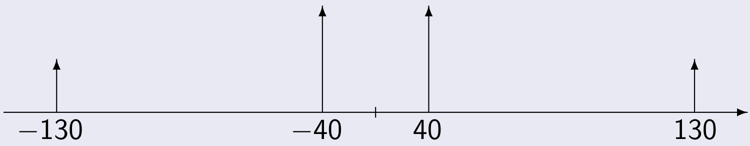
Esimerkki

$$s(t) = \frac{1}{2}\sin(2\pi \cdot 40t) + \frac{1}{4}\sin(2\pi \cdot 130t),$$

$$\mathcal{F}[s(t)](f) = \frac{1}{4i}\delta(f-40) - \frac{1}{4i}\delta(f+40) + \frac{1}{8i}\delta(f-130) - \frac{1}{8i}\delta(f+130)$$

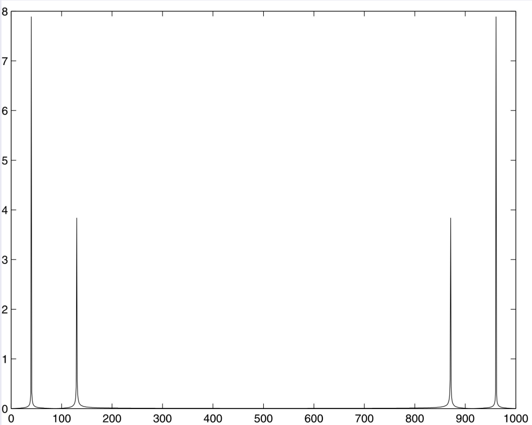
$$|\mathcal{F}[s(t)](f)| = \frac{1}{4}\delta(f-40) + \frac{1}{4}\delta(f+40) + \frac{1}{8}\delta(f-130) + \frac{1}{8}\delta(f+130)$$

Amplitudispektrin kuvaaja



Diracin δ-funktio

Amplitudispektri numeerisesti



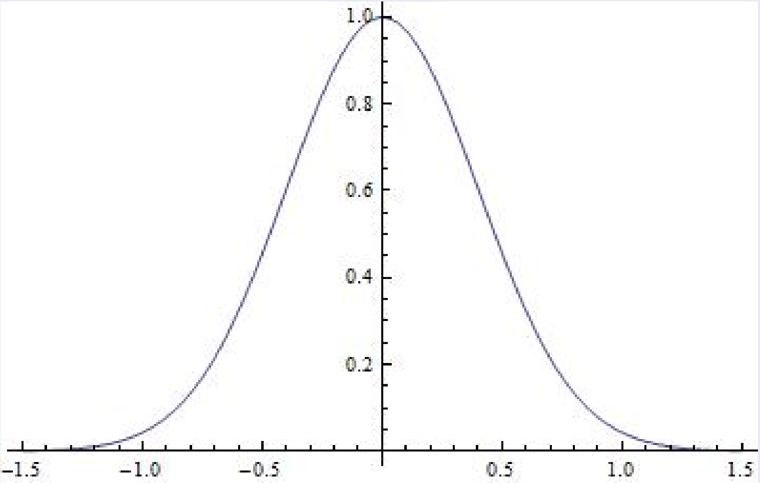
Diracin δ-funktio

Lause

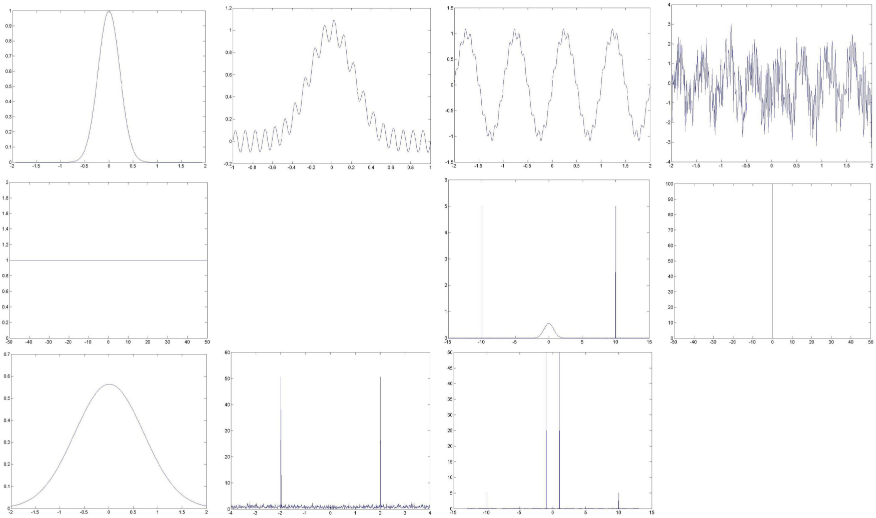
- $\delta(-x) = \delta(x)$
- $x\delta(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$
- $\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x)$ kun $a > 0$
- $x\delta'(x) = -\delta(x)$.

Signaali vs. amplitudispektri

Gaussin kellokäyrä (normittamaton) $\mathcal{F}[e^{-\pi x^2}] = e^{-\pi y^2}$



Signaali vs. amplitudispektri



Konvoluutio

Huomautus

Yleensä

$$\mathcal{F}[f \cdot g] \neq \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g],$$

mutta modulaatioperiaatteen mukaan

$$\mathcal{F}[f(x)e^{2\pi i y_0 x}](y) = F(y - y_0)$$

Onko mahdollista esittää funktio g eksponenttifunktioiden avulla?

Määritelmä

Funktioiden f ja g konvoluutio:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,dt$$

Konvoluutio

Lause

- $f * g = g * f$
- $f * (g * h) = (f * g) * h$
- $f * (\alpha g + \beta h) = \alpha f * g + \beta f * h$
- $D(f * g) = Df * g = f * Dg$

Lause

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g] \quad \text{ja} \quad \mathcal{F}[f \cdot g] = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]$$

Konvoluutio

Esimerkki

Esimerkit 47–49

Esimerkki

$$f * \delta$$