Insinöörimatematiikka: Fourier-analyysi

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Konvoluutio

Esimerkki

Esimerkit 47–49

Esimerkki

$$f * \delta$$

Heavisiden funktio

Määritelmä

$$H(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(x) + 1) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x < 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{jos } x = 0 \\ 1, & \text{jos } x > 0 \end{cases}$$

Määritelmä

$$\frac{d}{dx} H(x) = \delta(x),$$

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(t)\,dt$$

Esimerkki 50

Parsevalin kaava:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)\overline{G(y)}\,dy$$

Esimerkki 52

Derivointiperiaate:

$$\mathcal{F}[f'(x)](y) = 2\pi i y \mathcal{F}[f(x)](y)$$

Integrointiperiaate ?

Nyquistin näytteenottotaajuus

Signaali käytännössä

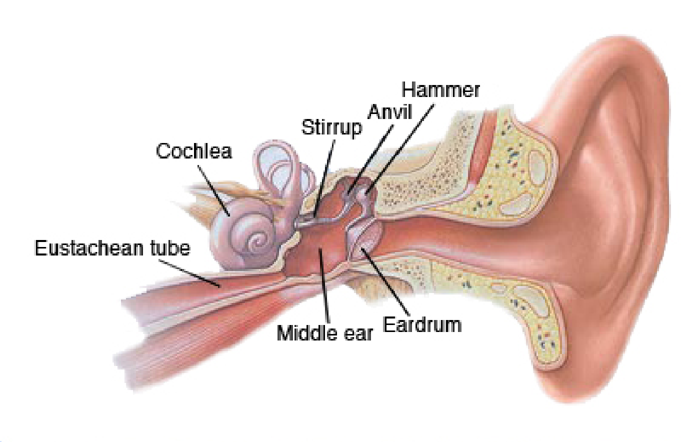
Sovelluksissa f on yleensä ajan myötä muuttuva fysikaalinen suure. Esimerkiksi

- Ilmanpaineen vaihtelu (ääni)
- Jännitteen vaihtelu (lankapuhelimet, DSL-linjat)
- Sähkö- ja magneettikentän vaihtelu (esim. valo, radioaallot)

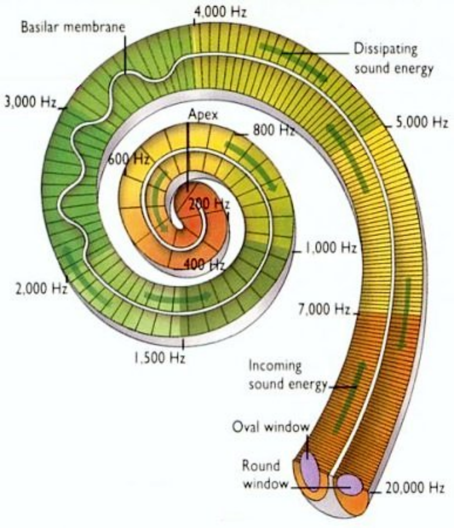
Huomautus

Sovelluksissa ei yleensä voida saada eksplisiittistä lauseketta $f(x)$:lle. Tästä seuraa, että spektrin laskeminen tavallisin differentiaali- ja integraalilaskennan keinoin analyyttisesti ei onnistu.

Korvan rakenne



Korvasimpukka



Nyquistin näytteenottotaajuus

Signaali käytännössä

- Sovelluksissa ei voida yleensä tuntea signaalia $f(x)$ miten tarkasti tahansa.
- Käytännössä joudutaan tyytymään *näytteisiin* $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... ja vieläpä näidenkin likiarvoihin.
- Signaalin korkeat taajuudet jäävät taltioimatta. Määre "korkeat", riippuu näytteenottopisteiden x_0, x_1, x_2, ... välistä.
- Esimerkki: CD-audio -standardia varten mikrofonin tulee taltioida ilmanpaineen arvo 44100 kertaa sekunnissa. Kukin taltiointi (näyte) esitetään 16 bittiä käyttäen. Stereoääntä varten tarvitaan tällöin $2 \cdot 44100 \cdot 16$ b ($\approx$ 172 kB) sekunnissa.

Nyquistin näytteenottotaajuus

Määritelmä

Sanotaan, että funktio

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi ixy}\, dy$$

sisältää taajuuden y, jos $F(y) \neq 0$ tai $F(-y) \neq 0$.
Jos funktio f ei sisällä B:tä korkeampia taajuuksia, on siis $F(y) = 0$, kun $|y| \geq B$

Esimerkki

Esimerkki 55

Nyquistin näytteenottotaajuus

Nyquistin-Shannonin näytteenottolause

Jos funktio f ei sisällä B:tä eikä sitä korkeampia taajuuksia, voidaan f epäjatkuvuuspisteitä lukuunottamatta selvittää arvoista $d_n = f(\frac{n}{2B})$.
Lisäksi pätee (Shannonin-Whittakerin interpolaatiokaava)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \operatorname{sinc}(2Bx - n)$$

Huomautus

Nyquistin-Shannonin näytteenottolauseessa esiintyvää taajuutta $2B$ kutsutaan Nyquistin näytteenottotaajuudeksi ja väliä $\frac{1}{2B}$ sanotaan Nyquistin näytteenottoväliksi.

Nyquistin näytteenottotaajuus

Nyquistin-Shannonin lauseen todistus

- $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{2\pi ixy}\,dy = \int_{-B}^{B} F(y)e^{2\pi ixy}\,dy$.
- Arvot $\frac{d_{-n}}{2B} = \frac{1}{2B} f(\frac{-n}{2B}) = \frac{1}{2B}\int_{-B}^{B} F(y)e^{-\frac{2\pi in}{2B}y}\,dy$ ovat spektrin $F(y)$ Fourier-sarjan kertoimet, joten

$$F(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_{-n}}{2B} e^{\frac{2\pi in}{2B}y}.$$

- $f(x) = \int_{-B}^{B} F(y)e^{2\pi ixy}\,dy = \ldots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \operatorname{sinc}(2Bx - n)$.

Nyquistin näytteenottotaajuus

Shannonin-Whittakerin interpolaatiokaava

Kaava voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \operatorname{sinc}(2Bx - n) \\ &= \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_n}{2B} \delta(x - \frac{n}{2B})\Big) * 2B \operatorname{sinc}(2Bx) \end{aligned}$$

Huomautus

Jos $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(y)](x)$, on

$$\mathcal{F}^{-1}[F(y) \cdot \Pi(\frac{y}{2B})](x) = f(x) * 2B \operatorname{sinc}(2Bx)$$

Nyquistin näytteenottotaajuus

Tulkinta

Näytteistä $d_n = f(\frac{n}{2B})$ rekonstruoidaan alkuperäinen signaali seuraavasti:

- Muodostetaan "Diracin kampa"

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_n}{2B} \delta(x - \frac{n}{2B})$$

- Leikataan tästä taajuuden B ylittävät osat kertomalla spektri pulssifunktiolla $\Pi(\frac{y}{2B})$.
- Tulos:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_n}{2B} \delta(x - \frac{n}{2B}) * 2B \operatorname{sinc}(2Bx).$$

Jatkuvan ja pistespektrin yhdistäminen

Fourierin integraali

Integraalissa

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi ixy}\, dy$$

spektri $F(y)$ on määritelty kaikilla $y \in \mathbb{R}$ (jatkuva spektri).

Fourierin sarja

Sarjassa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi in}{T} x}$$

spektri F_n on määritelty vain n:n kokonaislukuarvoilla (F_n vastaa taajuutta $\frac{n}{T}$). Tätä kutsutaan pistespektriksi.

Jatkuvan ja pistespektrin yhdistäminen

Pistespektri integraalissa

Jos

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x},$$

määritellään

$$F(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(y - \frac{n}{T})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi i x y}\, dy?$$

Esimerkki

Esimerkki 56

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Määritelmä

Signaali f on aikarajoitettu, jos on sellainen väli $[0, M]$, että $f(x) = 0$ aina kun $x \notin [0, M]$.

Tasaväliset näytteet

Olkoon f aikarajoitettu välille $[0, M]$ ja $M = N \cdot \Delta x$. Merkitään $f_0 = f(0)$, $f_1 = f(\Delta x)$, $f_2 = f(2 \cdot \Delta x)$, ..., $f_{N-1} = f((N-1)\Delta x)$

Huomatus

Nyquistin-Shannonin lauseen mukaan vain arvoa $B = \frac{1}{2\Delta x}$ matalammat taajuudet voidaan rekonstruoida.