Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra 2023

Demonstraatio 1, 7.11.2023

1. Selvitä onko vektoreiden $\boldsymbol{v}_1 = (2, -1)$ ja $\boldsymbol{v}_2 = (1, 3)$ avulla (lineaarikombinaationa) mahdollista muodostaa vektori $(-4, 9)$?

   Mallivastaus: Pitää selvittää onko sellaisia lukuja c_1 ja c_2 että $(-4, 9) = c_1(2, -1) + c_2(1, 3) = (2c_1 + c_2, -c_1 + 3c_2)$, jolloin siis pitää ratkaista yhtälöryhmä

   $$\begin{cases} 2c_1 & +c_2 & = & -4 \\ -c_1 & +3c_2 & = & 9 \end{cases}.$$

   Esimerkiksi kertomalla alempi yhtälö luvulla 2 ja laskemalla yhtälöt yhteen saadaan $7c_2 = 14$, josta $c_2 = 2$. Sijoittamalla tämä ylempään yhtälöön saadaan $2c_1 = -6$, josta $c_1 = -3$. Vaihtoehtoisesti yhtälöparin voi ratkaista Gaussin-Jordanin menetelmällä.

2. Selvitä onko vektoreiden $\boldsymbol{v}_1 = (1, 2, -2)$ ja $\boldsymbol{v}_2 = (-1, 2, 3)$ avulla (lineaarikombinaaationa) mahdollista muodostaa vektori $(1, 2, 0)$?

   Mallivastaus: Pitää selvittää onko olemassa luvut c_1 ja c_2 joille yhtälö $(1, 2, 0) = c_1(1, 2, -2) + c_2(-1, 2, 3)$ toteutuu. Tämä on yhtäpitävää yhtälöryhmän

   $$\begin{cases} c_1 & -c_2 & = & 1 \\ 2c_1 & +2c_2 & = & 2 \\ -2c_1 & +3c_2 & = & 0 \end{cases}$$

   kanssa.

   Esimerkiksi laskemalla toinen ja kolmas yhtälö yhteen saadaan $5c_2 = 2$, josta $c_2 = \frac{2}{5}$. Sijoittamalla tämä toiseen yhtälöön saadaan ratkaistua $c_1 = \frac{3}{5}$. Nämä arvot eivät kuitenkaan toteutua ensimmäistä yhtälöä, joten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

   Vaihtoehtoisesti yhtälöryhmän ratkaisuja voidaan hakea Gaussin-Jordanin menetelmällä ja todeta että ratkaisuja ei ole.

3. Määritellään joukko $A \subseteq \mathbb{R}^2$ seuraavasti: $A = \{(x, y) \mid x = t^2, y = t^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$. Selvitä onko A vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus. Ohje: On selvitettävä kuuluuko joukon A alkioiden summa sekä skalaarimonikerta joukkoon A.

   Mallivastaus: Valitaan esimerkiksi $t = 1$, josta nähdään että $(1, 1) \in A$. Toisaalta arvolla $t = -1$ nähdään että $(1, -1) \in A$. Näiden summa on $(1, 0)$, mikä ei voi kuulua joukkoon A, sillä $(1, 0) = (t^2, t^3)$ ei toteudu millekään t:n arvolle. Joukko A ei siis ole suljettu vektoriyhteenlaskun suhteen eikä näin ollen A ole $\mathbb{R}^2$:n aliavaruus.

4. Määritellään joukko $A \subseteq \mathbb{R}^2$ seuraavasti: $A = \{(x, y) \mid 3x + 5y = 0\}$. Selvitä onko A vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus. Ohje: Samoin kuin edellisessä tehtävässä.

   Mallivastaus: oletetaan, että $(x, y) \in A$. Tällöin $3x + 5y = 0$, mistä luvulla c kertomalla huomataan, että $3 \cdot cx + 5 \cdot cy = 0$, joten myös $c(x, y) = (cx, cy) \in A$. Oletetaan sitten, että (x_1, y_1) ja $(x_2, y_2) \in A$. Tällöin $3x_1 + 5y_1 = 0$ ja $3x_2 + 5y_2 = 0$ ja laskemalla nämä yhtälöt yhteen saadaan $3(x_1 + x_2) + 5(y_1 + y_2) = 0$. Täten siis myös $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in A$. Joukko A on siis suljettu skalaarikertolaskun sekä vektoriyhteenlaskun suhteen, joten se on $\mathbb{R}^n$:n aliavaruus.

5. Selvitä onko vektoreiden $\boldsymbol{v}_1 = (1,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,-1)$ ja $\boldsymbol{v}_3 = (1,-5)$ avulla mahdollista saada (lineaarikombinaationa) vektoria $(2,-4)$ jopa kahdella eri tavalla? Muodostavatko vektorit $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ ja $\boldsymbol{v}_3$ lineaarisesti riippumattoman joukon?

   Mallivastaus: On etsittävä sellaiset luvut c_1, c_2, c_3, että

$$(2,-4) = c_1(1,1) + c_2(1,-1) + c_3(1,-5), \tag{1}$$

   mikä on sama asia kuin yhtälöryhmän

$$\begin{cases} c_1 & +c_2 & +c_3 & = & 2 \\ c_1 & -c_2 & -5c_3 & = & -4 \end{cases}$$

   ratkaiseminen. Tämän yhtälöryhmän augmentoitu matriisi on

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

   Lisäämällä 1. rivi toiseen luvulla -1 kerrottuna saadaan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{pmatrix},$$

   kertomalla 2. rivi luvulla $-\frac{1}{2}$ saadaan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

   ja lisäämällä 2. rivi ensimmäiseen luvulla -1 kerrottuna saadaan matriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

   jota vastaa yhtälöpari

$$\begin{cases} c_1 & & -2c_3 & = & -1 \\ & c_2 & +3c_3 & = & 3 \end{cases}$$

   Tästä voidaan lukea kaikki ratkaisut:

$$\begin{aligned} (c_1, c_2, c_3) &= (2c_3 - 1, -3c_3 + 3, c_3) = (2c_3, -3c_3, c_3) + (-1, 3, 0) \\ &= c_3(2, -3, 1) + (-1, 3, 0), \end{aligned}$$

   missä $c_3 \in \mathbb{R}$. Tästä nähdään, että ratkaisuja yhtälölle (1) on äärettömän monta, esim. valitsemalla $c_3 = 0$ saadaan $(c_1, c_2, c_3) = (-1, 3, 0)$ ja valitsemalla esim. $c_3 = 1$ saadaan $(c_1, c_2, c_3) = (1, 0, 1)$.

   Tehtävän vektorijoukko ei siis ole kanta, vektorin $(2,-4)$ esitys sen avulla ei ole yksikäsitteinen. On mahdollista kylläkin todeta, että kyseinen kolmen vektorin joukko riittää generoimaan koko $\mathbb{R}^2$:n.

6. Miksi $B = \{\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta? Esitä vektori $(4,-1)$ tämän kannan avulla. Ohje jälkimmäiseen tehtävään: Etsi sellaiset luvut c_1 ja c_2, että

$$(4,-1) = c_1(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) + c_2(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}).$$

   Ota huomioon, että $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} = (1,1)$ ja $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} = (1,-1)$.

Mallivastaus: Vektorit $(1,1)$ ja $(1,-1)$ ovat lineaarisesti riippumattomat, sillä yhtälö $c_1(1,1)+c_2(1,-1)=(0,0)$ on ekvivalentti yhtälöparin

$$\begin{cases} c_1 & +c_2 & = & 0 \\ c_1 & -c_2 & = & 0 \end{cases}$$

kanssa. Helposti todetaan, että tämän ainoa ratkaisu on $(c_1,c_2)=(0,0)$. Laskemalla yhteen voidaan todeta että $2\boldsymbol{i}=(1,1)+(1,-1)$, josta $\boldsymbol{i}=\frac{1}{2}((1,1)+(1,-1))$ ja vähentämällä saadaan $2\boldsymbol{j}=(1,1)-(1,-1)$, josta $\boldsymbol{j}=\frac{1}{2}((1,1)-(1,-1))$. Näin ollen kannan $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$ vektorit voidaan esittää joukon B vektoreiden lineaarikombinaatioina, joten siis joukko B generoi avaruuden $\mathbb{R}^2$. Koska se todettiin jo lineaarisesti riippumattomaksi, se on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

Vektorille $(4,-1)$ saadaan esitys kannan B avulla esim. seuraavasti:

$$(4,-1)=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}=4\cdot\frac{1}{2}((1,1)+(1,-1))-\frac{1}{2}((1,1)-(1,-1))=\frac{3}{2}(1,1)+\frac{5}{2}(1,-1).$$

7. Valitaan kantapolynomeiksi 1, x, $x(x-1)$ ja $x(x-1)(x-2)$. Etsi polynomille x^3+2x^2-4x-2 esitys valittujen kantapolynomien avulla. Ohje: On löydettävä sellaiset luvut c_0, c_1, c_2 ja c_3, että

$$x^3+2x^2-4x-2=c_0\cdot 1+c_1\cdot x+c_2\cdot x(x-1)+c_3\cdot x(x-1)(x-2).$$

Mallivastaus:

$$\begin{aligned} & c_0\cdot 1+c_1\cdot x+c_2\cdot x(x-1)+c_3\cdot x(x-1)(x-2) \\ = \; & c_0+c_1x+c_2(x^2-x)+c_3(x^3-3x^2+2x) \\ = \; & c_0+(c_1-c_2+2c_3)x+(c_2-3c_3)x^2+c_3x^3. \end{aligned}$$

Vertaamalla kertoimia tehtävän polynomiin saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} c_0 & & & & = & -2 \\ & c_1 & -c_2 & +2c_3 & = & -4 \\ & & c_2 & -3c_3 & = & 2 \\ & & & c_3 & = & 1 \end{cases},$$

jonka alimmasta yhtälöstä selviää c_3, tämän avulla toiseksi alimmasta c_2, jne. Näin ollen $(c_0,c_1,c_2,c_3)=(-2,-1,5,1)$ ja siis

$$x^3+2x^2-4x-2=-2-x+5x(x-1)+x(x-1)(x-2)$$

8. Mikä on yhtälöparin

$$\begin{cases} x & + & 2y & =-1 \\ 2x & + & y & =1 \end{cases}$$

kerroinmatriisi? Entä augmentoitu matriisi? Saata augmentoitu matriisi redusoituun porrasmuotoon ja totea tästä yhtälöparin ratkaisut.

Mallivastaus: Kerroinmatriisi on

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

augmentoitu matriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Augmentoidusta matriisista saadaan redusoitu porrasmuoto seuraavasti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Viimeisin matriisi vastaa yhtälöparia

$$\begin{cases} x & & = & 1 \\ & y & = & -1 \end{cases},$$

jonka ratkaisut voidaan lukea suoraan.

9. Mikä on yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x & +y & +2z & = 1 \\ -x & & +z & = -3 \\ 2x & +y & +z & = 4 \end{cases}$$

kerroinmatriisi? Entä augmentoitu matriisi? Saata augmentoitu matriisi redusoituun porrasmuotoon ja esitä yhtälöryhmän ratkaisut muodossa

$$z\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b},$$

missä $z \in \mathbb{R}$ ja $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$.

Mallivastaus: Yhtälöryhmän kerroinmatriisi on

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ja augmentoitu matriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Redusoitu porrasmuoto augmentoidulle matriisille saadaan seuraavasti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Redusoitu porrasmuoto vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x & & -z & = 3 \\ & y & +3z & = -2 \end{cases},$$

jonka ratkaisut ovat $(x, y, z) = (z + 3, -3z - 2, z) = (z, -3z, z) + (3, -2, 0) = z(1, -3, 1) + (3, -2, 0)$, missä $z \in \mathbb{R}$.