

# Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra 2023

## Demonstraatio 2, 14.11.2023

1. Määritellään lineaarikuvaus  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  seuraavasti:

$$T(x, y) = (x + y, -2x + 4y).$$

Määritä lineaarikuvauksen matriisi  $A$  luonnollisen kannan  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  suhteen (sama kanta sekä lähtö- että kuva-avaruudessa) ja esitä lineaarikuvaus matriisikertolaskuna  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ , missä  $\mathbf{x}$  ja  $\mathbf{y}$  ovat sarakevektoreita.

2. Valitaan avaruudelle  $\mathbb{R}^2$  kanta  $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$ . Selitä ensiksi (lyhyesti) miksi  $B$  todella on kanta ja etsi sitten edellisen tehtävän lineaarikuvauksen matriisi kannan  $B$  suhteen (sama kanta sekä lähtö- että kuva-avaruudessa).
3. Määritellään differenssioperaatio  $\Delta$  reaalikertoimisten polynomien muodostamassa vektorivaruudessa seuraavasti  $\Delta p(x) = p(x+1) - p(x)$ . Osoita, että  $\Delta$  on lineaarinen ja laske  $\Delta 1$  (vakiopolynomi 1),  $\Delta x$ ,  $\Delta x(x-1)$  ja  $\Delta x(x-1)(x-2)$ . Ohje lineaarisuutta varten: Osoita suoralla laskulla että  $\Delta \alpha p = \alpha \Delta p$  ja että  $\Delta(p_1 + p_2) = \Delta p_1 + \Delta p_2$ .
4. Olkoon  $P_4$  korkeintaan astetta 3 olevien reaalikertoimisten polynomien joukko ja sen kanta  $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ . Määritä kuvaukselle  $D : P_4 \rightarrow P_4$  ( $Dp$  tarkoittaa polynomifunktion derivaattaa) matriisi kannan  $B$  suhteen (sama kanta alkukuvulle ja kuvalle). Ohje: Laske jokaiselle kannan  $B$  alkiolle derivaattafunktio ja esitä nämä kannan  $B$  avulla.
5. Olkoot merkinnät kuten tehtävissä 3 ja 4. Määritä kuvauksen  $\Delta$  matriisi kannan  $B$  suhteen. Ohje: Esitä kuvat  $\Delta 1$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta x^2$ ,  $\Delta x^3$  kannan  $B$  avulla.
6. Valitaan avaruudelle  $P_4$  kanta  $C = \{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)\}$ . Määritä kuvaukselle  $\Delta$  matriisi kannan  $C$  suhteen. Ohje: Esitä kuvat kannan  $C$  avulla.
7. Olkoot  $B$  ja  $C$  kolmessa edellisessä tehtävässä esiintyneet kannat. Määritä kannanvaihdon  $B \rightarrow C$  matriisi. Ohje: Etsi sellainen  $4 \times 4$ -matriisi, että  $\mathbf{y} = M\mathbf{x}$ , missä  $\mathbf{x}$  on polynomien  $p$  koordinaattivektori (sarake) kannan  $B$  suhteen ja  $\mathbf{y}$  saman polynomien koordinaattivektori (sarake) kannan  $C$  suhteen.

8. Olkoot  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$  ja  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$  Laske (käyttämättä oh-

jelmistoa tai laskinta) seuraavista ne, jotka on määritelty:  $AB$ ,  $BA$ ,  $B^2$ ,  $-2A$ ,  $A + B$ ,  $A^T A$ .

9. Käytä luennolla esitettyä menetelmää (ei ohjelmistoa tai laskinta) käänteismatriisin etsimiseksi seuraaville matriiseille:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ , ja  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ . Tarkista matriisikertolaskulla ovatko saadut matriisit käänteismatriiseja.