

Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra 2023

Demonstratio 3, 21.11.2023

Jos ei ole toisin mainittu, laskut tulee suorittaa käsin.

1. Selitä kahdella eri tavalla miksi

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc.$$

2. Laske determinantit

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

ja

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}.$$

3. Selitä ainakin yhdellä tavalla miksi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

Yllä olevassa merkinnässä asteriskit * tarkoittavat mitä tahansa lukuja.

4. Määritä determinantti

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

Ohje: Lisää aluksi 1. rivi toiseen luvulla $-a$ kerrottuna ja kolmanteen luvulla $-a^2$ kerrottuna.

5. Määritä determinantti

$$\det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -6 & 4 - \lambda \end{pmatrix}.$$

6. Määritä determinantti

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & -1 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -2 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Ohje: Hyödynnä tehtävän 3 tulosta.

7. Selvitä matriisin

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja -vektorit. Ohje: hyödynnä tehtävän 5 tulosta.

8. Selvitä matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja -vektorit. Ohje: Hyödynnä tehtävän 6 tulosta.

9. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ja $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ matriisin A määrittämä lineaarikuvaus (\mathbf{x} esitetään sarakevektorina). Laske kuvat $f(\mathbf{x}_1)$ ja $f(\mathbf{x}_2)$ ainakin kahdelle \mathbb{R}^2 :n vektorille \mathbf{x}_1 ja \mathbf{x}_2 jotka eivät ole samansuuntaisia ja esitä kuvien perusteella arvaus kuvauksen f geometrisesta merkityksestä. Määritä lopuksi matriisin A ominaisarvot.