

Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra 2023

Demonstraatio 4, 28.11.2023

Mikäli ei toisin mainita, tehtävät tulee suorittaa käsin laskemalla.

Demotehtävissä

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ovat samat matriisit, joille Demo 3 tehtävissä on jo määritetty ominaisarvot ja -vektorit.

1. selvitä millä kulman $\alpha \in [0, 2\pi)$ arvoilla kiertomatriisiin

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat reaalisia.

2. Esitä vektori $(3, -4)^T$ matriisin A ominaisvektoreiden lineaarikombinaationa ja esitä lauseke

$$A^n(3, -4)^T$$

niinikään ominaisvektoreiden lineaarikombinaationa.

3. Esitä matriiseille A ja B similaarinen diagonaalimatriisi.
4. Matriisi A määrittää lineaarikuvauksen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Valitaan avaruuden \mathbb{R}^2 kannaksi \mathcal{B} matriisin A ominaisvektoreiden muodostama kanta. Mikä on kuvauksen matriisi kannan \mathcal{B} suhteen?

5. Laske e^{tA} ja $\sin(tA)$. Ohje: Tässä tarvitaan diagonaalimuodon lisäksi diagonaalisuuden välittävä matriisi.
6. Määritä matriisin

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit. Onko matriisi C diagonalisoituva?

7. Olkoon C edellisen tehtävän matriisi. Etsi sellainen matriisi P , että $P^{-1}CP = J$ on Jordan-lohkomuotoa. Ohje: Selvitä toisen kertaluvun ominaisvektorit ja etsi Jordanin ketju. Gaussin-Jordanin menetelmä redusoidun porrasmuodon ja käänteismatriisin etsimiseksi voidaan suorittaa koneellisesti.
8. Osoita että

$$(x_1 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \dots + x_n^2).$$

Ohje: Käytä Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöä sopivasti valitulla vektorilla \mathbf{y} .

9. Jos $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ja $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, määritellään

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 5x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

Osoita että (\mathbf{x}, \mathbf{y}) toteuttaa kaksi ensimmäistä sisätulon ehtoa. Ohje: $5x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 = 3x_1^2 + 2(x_1 - x_2)^2$.