Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra 2023

Demonstraatio 4, 28.11.2023

Mikäli ei toisin mainita, tehtävät tulee suorittaa käsin laskemalla.

Demotehtävissä

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ovat samat matriisit, joille Demo 3 tehtävissä on jo määritetty ominaisarvot ja -vektorit.

1. selvitä millä kulman $\alpha \in [0, 2\pi)$ arvoilla kiertomatriisin

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat reaalisia.

Mallivastaus: Ominaisarvoyhtälö on

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

joka saadaan muotoon

$$\lambda^2 - 2\cos\alpha \cdot \lambda + 1 = 0.$$

Ominaisarvot saadaan tästä yhtälöstä:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2} = \cos\alpha \pm \sqrt{-\sin^2\alpha} \\ &= \cos\alpha \pm i\,|\sin\alpha|\,. \end{aligned}$$

Ominaisarvot ovat reaalisia vain kun $\sin\alpha = 0$, mikä toteutuu välillä $[0, 2\pi)$ vain kun $\alpha \in \{0, \pi\}$.

Mietittävää: Mistä mahtaa johtua, että reaaliset ominaisarvot kiertomatriisille ovat mahdollisia vain näillä kulman α arvoilla?

2. Esitä vektori $(3, -4)^T$ matriisin A ominaisvektoreiden lineaarikombinaationa ja esitä lauseke

$$A^n(3, -4)^T$$

niinikään ominaisvektoreiden lineaarikombinaationa.

Mallivastaus: Demotehtävän 7/21.11. perusteella matriisin ominaisarvot ovat 1 ja 6 ja näihin liittyvät ominaisvektorit $(1, 2)^T$ sekä $(-1, 3)^T$.

On selvitettävä skalaarit a ja b, joille $(3, -4)^T = a(1, 2)^T + b(-1, 3)^T$. Tästä saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ 2a + 3b = 4 \end{cases},$$

jonka ratkaisu on $(a, b) = (1, -2)$. Näin ollen

$$A^n(3, -4)^T = A^n(1, 2)^T - 2A^n(-1, 3)^T = (1, 2)^T - 2\cdot 6^n(-1, 3)^T = (1 - 2\cdot 6^n, 2 - 6\cdot 6^n)^T.$$

3. Esitä matriiseille A ja B similaarinen diagonaalimatriisi.

   Mallivastaus: Matriisien ominaisarvot ja -vektorit on selvitetty demotehtävissä 21.11./ 7–8. Kummankin matriisin ominaisvektoreista voidaan selvästi muodostaa koko avaruuden kanta (miksi?), joten similaariset diagonaalimatriisit saadaan asettamalla diagonaalille ominaisarvot. Näin ollen

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{ja} \qquad B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Matriisi A määrittää lineaarikuvauksen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   Valitaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ kannaksi $\mathcal{B}$ matriisin A ominaisvektoreiden muodostama kanta. Mikä on kuvauksen matriisi kannan $\mathcal{B}$ suhteen?

   Mallivastaukset: Matriisin A ominaisvektoreiden kuvat ovat $A(1,2) = 1\cdot(1,2) + 0\cdot(-1,3)$ ja $A(-1,3) = 0\cdot(1,2) + 6(-1,3)$. Näin ollen lineaarikuvauksen matriisi kannan $\mathcal{B}$ suhteen on

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

   (vrt. Demo 14.11. tehtävät 2,4,5,6,7)

5. Laske e^{tA} ja $\sin(tA)$. Ohje: Tässä tarvitaan diagonaalimuodon lisäksi diagonaalisuuden välittävä matriisi.

   Mallivastaus: Diagonaalisuuden välittävä matriisi saadaan valitsemalla sarakkeiksi ominaisvektorit:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Tämän käänteismatriisi saadaan Gaussin-Jordanin menetelmällä (kts. Demo 14.11 tehtävä 9):

$$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Täten

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Tästä esityksestä voidaan määrittää

$$e^{tA} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-6t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2e^{-6t} + 3e^t & 2e^{-6t} - 2e^t \\ 3e^{-6t} - 3e^t & 2e^{-6t} + 2e^t \end{pmatrix}$$

   ja

$$\begin{aligned} \sin(tA) &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & -\sin 6t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3\sin t - 2\sin 6t & -2\sin t - 2\sin 6t \\ -3\sin t - 3\sin 6t & 2\sin t - 3\sin 6t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. Määritä matriisin

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit. Onko matriisi C diagonalisoituva?

Mallivastaus: Ominaisarvoyhtälö on

$$(7-\lambda)(-5-\lambda)-9(-4)=0 \Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=1.$$

Ominaisarvoon $\lambda=1$ liittyvät ominaisvektorit saadaan Gaussin-Jordanin prosessilla:

$$\begin{pmatrix} -6 & -9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

josta nähdään että ominaisvektorit ovat $(x,y)^T=(-\frac{3}{2}y,y)=\frac{y}{2}(-3,2)^T$. Näistä ei voi muodostaa avaruuden $\mathbb{R}^2$ kantaa, joten matriisi C ei ole diagonalisoituva.

7. Olkoon C edellisen tehtävän matriisi. Etsi sellainen matriisi P, että $P^{-1}CP=J$ on Jordan-lohkomuotoa. Ohje: Selvitä toisen kertaluvun ominaisvektorit ja etsi Jordanin ketju. Gaussin-Jordanin menetelmä redusoidun porrasmuodon ja käänteismatriisin etsimiseksi voidaan suorittaa koneellisesti.

   Mallivastaus: On etsittävä toisen kertaluvun ominaisvektori ja sitä varten matriisi $(C-1\cdot I)^2=O$, joten toisen kertaluvun ominaisvektorit toteuttavat yhtälön $O\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. Mikä hyvänsä avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori siis kelpaa. Valitaan sellainen, jota ei saadaa 1. kertaluvun ominaivektorin skalaarimonikertana; esimerkiksi $(1,0)^T$ (miksi tämä kelpaa?). Matriisia P varten tulee etsiä Jordanin ketju, mikä tässä tapauksessa tarkoittaa sitä, että 1. kertaluvun ominaisvektori tulee valita seuraavasti:

   $$(C-1\cdot I)(1,0)^T=(6,-4)^T$$

   Matriisiksi P voidaan siis valita

   $$P=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

   Tämän käänteismatriisi on

   $$P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

   ja

   $$C=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

8. Osoita että

   $$(x_1+\ldots+x_n)^2 \le n(x_1^2+\ldots+x_n^2).$$

   Ohje: Käytä Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöä sopivasti valitulla vektorilla $\boldsymbol{y}$.

   Mallivastaus: Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö tavalliselle pistetulolle saa muodon

   $$(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2 \le (y_1^2+\ldots+y_n^2)(x_1^2+\ldots+x_n^2).$$

   Sijoittamalla tähän $\boldsymbol{y}=(1,1,\ldots,1)$ saadaan tehtävän väite.

9. Jos $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$ ja $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)$, määritellään

   $$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=5x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+2x_2y_2.$$

   Osoita että $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ toteuttaa kaksi ensimmäistä sisätulon ehtoa. Ohje: $5x_1^2-4x_1x_2+2x_2^2=3x_1^2+2(x_1-x_2)^2$.

Mallivastaus: Ensimmäinen ehto on $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ ja $\boldsymbol{x} = 0$ jos ja vain jos $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Tämä voidaan todeta seuraavasti: Valitaan $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ ja $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$. Tällöin

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 5x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 2x_2^2 = 3x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 \geq 0,$$

koska $3x_1^2 \geq 0$ ja $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$. Jos viimeisin lauseke $= 0$, on oltava sekä $3x_1^2 = 0$ ja $x_1 - x_2 = 0$. ensimmäisen perusteella $x_1 = 0$ ja toisen perusteella myös $x_2 = 0$.

Sisätulon toinen ehto on vaihdannaisuus ja tämä on selvää määritelmän mukaiselle lausekkeelle:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) &= 5y_1x_1 - 2y_1x_2 - 2y_2x_1 + 2y_2x_2 \\ &= 5x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 2x_2y_2 = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

Huomautus: Myös kolmas sisätulon ehto toteutuu, vaikka tämä on työläämpi todeta laskennallisesti. Huomaamalla että

$$\begin{aligned}&5y_1x_1 - 2y_1x_2 - 2y_2x_1 + 2y_2x_2 = x_1(5y_1 - 2y_2) + x_2(-2y_1 + 2y_2) \\ = \quad &(x_1\, x_2)\begin{pmatrix} 5y1 - 2y_2 \\ -2y_1 + 2y_2 \end{pmatrix} = (x_1\, x_2)\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ja että $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ on symmetrinen positiividefiniitti matriisi, voidaan todeta suoraan että tehtävän lauseke määrittelee sisätulon. Symmetrinen matriisi voidaan havaita positiividefiniitiksi määrittämällä ominaisarvot ja toteamalla että ne ovat positiiviset.