Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra 2023

Demonstraatio 5 5.12.2023

1. Olkoon $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta, $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2$, ja $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{b}_1 + y_2\boldsymbol{b}_2$ ja $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ jokin sisätulo.

   Sijoita vektoreiden $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ kantaesitykset sisätuloon $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ja esitä tämä kantavektoreiden sisätulojen $(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j)$ avulla.

   Vertaa näin saatua lauseketta matriisituloon

   $$(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

   Mitä voit todeta matriisialkioista M_{ij}?

2. Sopivalla sijoituksella $x_1 = \alpha x + \beta y$ ja $y_1 = \gamma x + \delta y$ voidaan *neliömuodosta* $ax^2 + bxy + cy^2$ eliminoida "sekatermi" xy.

   Tarkastele tätä varten ensin miltä näyttää

   $$(x\ y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

   ja kirjoita sen jälkeen

   $$5x^2 - 4xy + 2y^2$$

   muotoon (1). Etsi sitten kaavassa esiintyvän matriisin ominaisarvot ja -vektorit, similaarinen diagonaalimatriisi ja similarisuuden välittävä matriisi. Miten näistä selviää sijoitus, jossa "sekatermi" xy häviää? Vihje: Edellisen kerran demotehtävä.

3. Olkoon $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ sisätulon indusoima normi. Osoita, että tällöin

   $$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||^2 + ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||^2 = 2\,||\boldsymbol{x}||^2 + 2\,||\boldsymbol{y}||^2 . \tag{2}$$

   Selitä miksi yhtälöä (2) kutsutaan *suunnikassäännöksi*.

4. Osoita, että $\mathbb{R}^2$:ssa määritelty normi $||(x, y)|| = |x| + |y|$ ei aina toteuta suunnikassääntöä.

5. Totea suoraan laskemalla, että ns. polarisaatioyhtälö

   $$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{4}(||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||^2 - ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||^2)$$

   on tosi. Tässä oletetaan, että normi on sisätulon indusoima kuten edellisessä tehtävässä.

6. Välillä $[\alpha, \alpha + T]$ määritellyille kompleksiarvoisille tietyt ehdot toteuttaville funktiolle määritellään sisätulo ehdolla

   $$(f, g) = \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

   Mikä on funktioiden $e^{\frac{2\pi i n x}{T}}$ ja $e^{\frac{2\pi i m x}{T}}$ etäisyys edellä määritellyn sisätulon indusoiman metriikan suhteen? Vihje: Integrointiin liittyvät laskut on esitetty luennolla ja niihin voi vedota.

7. Totea laskemalla että avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorijoukko $B = \{(1,2,0),(-2,1,3),(6,-3,5)\}$ on ortogonaali tavallisen pistetulon suhteen ja etsi vektorille $(4,3,11)$ esitys joukon B vektoreiden lineaarikombinaationa.

8. Totea että vektorijoukko $B_1 = \{(-2,1,3),(1,-3,-3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ on lineaarisesti riippumaton. Käytä luennolla esitettyä Gramin-Schmidtin menetelmää ja esitä jokin jokin ortogonaali (tavallisen pistetulon suhteen) vektorijoukko B_2, joka generoi saman aliavaruuden kuin B_1.

9. Olkoot $\boldsymbol{x} = (1,4,6,2,1,4,7,3)$ ja $\boldsymbol{y} = (6,2,1,5,4,2,2,5)$. Laske matematiikkaohjelmalla (tai muulla tavalla) koordinaattien keskiarvot $\mu_{\boldsymbol{x}}$ ja $\mu_{\boldsymbol{y}}$, $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \mu_{\boldsymbol{x}}\mathbf{1}$, $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} - \mu_{\boldsymbol{y}}\mathbf{1}$ sekä vektoreisen $\boldsymbol{x}'$ ja $\boldsymbol{y}'$ välisen kulman kosini. Merkintä $\mathbf{1}$ tarkoittaa vektoria $(1,1,1,1,1,1,1,1)$.