Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra 2023

Demonstraatio 5 5.12.2023

1. Olkoon $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta, $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2$, ja $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{b}_1 + y_2\boldsymbol{b}_2$ ja $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ jokin sisätulo.

   Sijoita vektoreiden $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ kantaesitykset sisätuloon $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ja esitä tämä kantavektoreiden sisätulojen $(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j)$ avulla.

   Vertaa näin saatua lauseketta matriisituloon

   $$(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

   Mitä voit todeta matriisialkioista M_{ij}?

   Mallivastaus: Avaruudessa $\mathbb{R}^2$ sisätulo on reaalinen, joten

   $$\begin{aligned} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= (x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2, y_1\boldsymbol{b}_1 + y_2\boldsymbol{b}_2) \\ &= x_1y_1(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) + x_1y_2(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) + x_2y_1(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1) + x_2y_2(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2) \end{aligned}$$

   Toisaalta

   $$\begin{aligned} & (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} M_{11}y_1 + M_{12}y_2 \\ M_{21}y_1 + M_{22}y_2 \end{pmatrix} \\ = \ & x_1y_1M_{11} + x_1y_2M_{12} + x_2y_1M_{21} + x_2y_2M_{22}. \end{aligned}$$

   Jos siis valitaan matriisialkioiksi $M_{ij} = (\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j)$ saadaan sisätulolle esitys koordinaattivektoreiden $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$ ja $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T$ avulla muodossa $\boldsymbol{x}^T M\boldsymbol{y}$.

   Huomautus: Koska $(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) = (\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_i)$, voidaan todeta että matriisi M on symmetrinen. Koska $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T M\boldsymbol{x}$, voidaan todeta myös että matrisiisi M on positiividefiniitti.

2. Sopivalla sijoituksella $x_1 = \alpha x + \beta y$ ja $y_1 = \gamma x + \delta y$ voidaan *neliömuodosta* $ax^2 + bxy + cy^2$ eliminoida ”sekatermi” xy.

   Tarkastele tätä varten ensin miltä näyttää

   $$(x\ y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

   ja kirjoita sen jälkeen

   $$5x^2 - 4xy + 2y^2$$

   muotoon (1). Etsi sitten kaavassa esiintyvän matriisin ominaisarvot ja -vektorit, similaarinen diagonaalimatriisi ja similarisuuden välittävä matriisi. Miten näistä selviää sijoitus, jossa ”sekatermi” xy häviää? Vihje: Edellisen kerran demotehtävä.

   Mallivastaus:

   $$\begin{aligned} & (x\ y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x\ y)\begin{pmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{pmatrix} \\ = \ & ax^2 + bxy + bxy + cy^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2. \end{aligned}$$

Tämän perusteella

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matriisin ominaisarvot löytyvät ratkaisemalla yhtälö

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1, 6\}.$$

Ominaisarvoihin $\lambda = 1$ ja $\lambda = 6$ liittyvät ominaisvektorit löytyvät yhtälön $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ ratkaisuista, sellaisiksi voidaan valita esimerkiksi $(-2, 1)^T$ ja $(1, 2)^T$. Näiden kummankin normi on $\sqrt{5}$, joten valitaan diagonaalisuuden välittäväksi matriisiksi

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Suoraan laskemalla

$$P^T P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = I$$

Tällöin sijoitus $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}_1$ tuottaa

$$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = (P\boldsymbol{x}_1)^T AP\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1^T P^T AP\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1^T P^{-1} AP\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1^T D\boldsymbol{x}_1,$$

missä D on diagonaalimatriisi eikä siis sekatermiä xy esiinny.

Todetaan tämä suoraan laskemalla: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ tuottaa muodon, jossa sekatermiä ei esiinny. Todetaan tämä laskemalla: $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x_1 + y_1)$ ja $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 + 2y_1)$, jolloin

$$\begin{aligned} & 5x^2 - 4xy + 2y^2 \\ = \ & 5 \cdot \frac{1}{5}(-2x_1 + y_1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{5}(-2x_1 + y_1)(x_1 + 2y_1) + 2\frac{1}{5}(x_1 + 2y_1)^2 \\ = \ & (4x_1^2 - 4x_1y_1 + y_1^2) - \frac{4}{5}(-2x_1^2 - 3x_1y_1 + 2y_1^2) + \frac{2}{5}(x_1^2 + 4x_1y_1 + 4y_1^2) \\ = \ & 6x_1^2 + y_1^2. \end{aligned}$$

Huomautus: Myös ilman kerrointa $\frac{1}{\sqrt{5}}$ saataisiin sekatermin xy poistava sijoitus.

3. Olkoon $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ sisätulon indusoima normi. Osoita, että tällöin

$$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||^2 + ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||^2 = 2\,||\boldsymbol{x}||^2 + 2\,||\boldsymbol{y}||^2\,. \tag{2}$$

Selitä miksi yhtälöä (2) kutsutaan *suunnikassäännöksi.*

Mallivastaus:

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||^2 + ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||^2 &= (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \\ &+ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \\ &= 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 2\,||\boldsymbol{x}||^2 + 2\,||\boldsymbol{y}||^2\,. \end{aligned}$$

Yhtälö merkitsee geometrisesti sitä, että suunnikkaan sivujen neliöiden summa on sama kuin suunnikkaan lävistäjien neliöiden summa.

4. Osoita, että $\mathbb{R}^2$:ssa määritelty normi $||(x,y)|| = |x| + |y|$ ei aina toteuta suunnikassääntöä.

   Mallivastaus: Valitaan esimerkiksi $\boldsymbol{x} = (1,0)$ ja $\boldsymbol{y} = (0,1)$. Tällöin $||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2 + ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2 = ||(1,1)||^2 + ||(1,-1)||^2 = 2^2 + 2^2 = 8$. Toisaalta $2\,||\boldsymbol{x}||^2 + 2\,||\boldsymbol{y}||^2 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4$, joten suunnikassääntö ei toteudu. Tämän vuoksi tämä normi ei voi olla minkään sisätulon indusoima.

5. Totea suoraan laskemalla, että ns. polarisaatioyhtälö

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{4}(||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2 - ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2)$$

   on tosi. Tässä oletetaan, että normi on sisätulon indusoima kuten edellisessä tehtävässä.

   Mallivastaus:

$$\begin{aligned}
||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2 - ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2 &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) \\
&- (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) \\
&= 4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).
\end{aligned}$$

   Väite seuraa tästä suoraan.

6. Välillä $[\alpha, \alpha+T]$ määritellyille kompleksiarvoisille tietyt ehdot toteuttaville funktiolle määritellään sisätulo ehdolla

$$(f,g) = \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

   Mikä on funktioiden $e^{\frac{2\pi inx}{T}}$ ja $e^{\frac{2\pi imx}{T}}$ etäisyys edellä määritellyn sisätulon indusoiman metriikan suhteen? Vihje: Integrointiin liittyvät laskut on esitetty luennolla ja niihin voi vedota.

   Mallivastaus:

$$d(e^{\frac{2\pi inx}{T}}, e^{\frac{2\pi imx}{T}}) = \left|\left| e^{\frac{2\pi inx}{T}} - e^{\frac{2\pi imx}{T}} \right|\right|.$$

   Jos $n = m$, on normi ja kysytty etäisyys selvästi 0. Olkoon sitten $n \neq m$. Tällöin

$$\begin{aligned}
&\left|\left| e^{\frac{2\pi inx}{T}} - e^{\frac{2\pi imx}{T}} \right|\right|^2 = (e^{\frac{2\pi inx}{T}} - e^{\frac{2\pi imx}{T}}, e^{\frac{2\pi inx}{T}} - e^{\frac{2\pi imx}{T}}) \\
= \; &(e^{\frac{2\pi inx}{T}}, e^{\frac{2\pi inx}{T}}) - (e^{\frac{2\pi inx}{T}}, e^{\frac{2\pi imx}{T}}) - (e^{\frac{2\pi imx}{T}}, e^{\frac{2\pi inx}{T}}) + (e^{\frac{2\pi imx}{T}}, e^{\frac{2\pi imx}{T}}) \\
= \; &T + T,
\end{aligned}$$

   joten kysytty etäisyys on $\sqrt{2T}$.

7. Totea laskemalla että avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorijoukko $B = \{(1,2,0), (-2,1,3), (6,-3,5)\}$ on ortogonaali tavallisen pistetulon suhteen ja etsi vektorille $(4,3,11)$ esitys joukon B vektoreiden lineaarikombinaationa.

   Mallivastaus: $(1,2,0)\cdot(-2,1,3) = 1\cdot(-2)+2\cdot 1+0\cdot 3 = 0$, $(1,2,0)\cdot(6,-3,5) = 1\cdot 6 + 2\cdot(-3) + 0\cdot 5 = 0$, $(-2,1,3)\cdot(6,-3,5) = -2\cdot 6 + 1\cdot(-3) + 3\cdot 5 = 0$, joten vektorijoukko on ortogonaali.

   Vektorille $(4,3,11)$ voidaan löytää kantaesitys käyttämällä ortogonaalisuutta: Yhtälöstä

$$(4,3,11) = c_1(1,2,0) + c_2(-2,1,3) + c_3(6,-3,5) \tag{3}$$

saadaan sisätulo vektorin $(1,2,0)$ kanssa laskemalla

$$(4,3,11)\cdot(1,2,0) = c_1(1,2,0)\cdot(1,2,0) \Leftrightarrow 10 = 5c_1 \Leftrightarrow c_1 = 2.$$

Kun yhtälössä (3) lasketaan sisätulo vektorin $(-2,1,3)$ kanssa saadaan

$$(4,3,11)\cdot(-2,1,3) = c_2(-2,1,3)\cdot(-2,1,3) \Leftrightarrow 28 = 14c_2 \Leftrightarrow c_2 = 2$$

Sisätulo vektorin $(6,-3,5)$ kanssa laskemalla yhtälöstä (3) saadaan

$$(4,3,11)\cdot(6,-3,5) = c_3(6,-3,5)\cdot(6,-3,5) \Leftrightarrow 70 = 70c_3 \Leftrightarrow c_3 = 1.$$

Näin ollen

$$(4,3,11) = 2\cdot(1,2,0) + 2\cdot(-2,1,3) + 1\cdot(6,-3,5)$$

8. Totea että vektorijoukko $B_1 = \{(-2,1,3),(1,-3,-3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ on lineaarisesti riippumaton. Käytä luennolla esitettyä Gramin-Schmidtin menetelmää ja esitä jokin jokin ortogonaali (tavallisen pistetulon suhteen) vektorijoukko B_2, joka generoi saman aliavaruuden kuin B_1.

   Mallivastaus: Joukko on lineaarisesti riippumaton, sillä vektoreita ei saada toistensa skalaarimonikertana. Nyt nimittäin missä tahansa vektorin $(1,-3,-3)$ skalaarimonikerrassa kaksi viimeisintä koordinaattia ovat samat. Näin ei kuitenkaan ole vektorissa $(-2,1,3)$.

   Valitaan $\boldsymbol{y}_1 = (-2,1,3)$ ja

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_2 &= (1,-3,-3) - \frac{(-2,1,3)\cdot(1,-3,-3)}{(-2)^2+1^2+3^2}(-2,1,3) \\ &= (1,-3,-3) - \frac{-14}{14}(-2,1,3) = (-1,-2,0).\end{aligned}$$

   Vektorit $\boldsymbol{y}_1$ ja $\boldsymbol{y}_2$ ovat ortogonaalit ja generoivat avaruuden B_1.

9. Olkoot $\boldsymbol{x} = (1,4,6,2,1,4,7,3)$ ja $\boldsymbol{y} = (6,2,1,5,4,2,2,5)$. Laske matematiikkaohjelmalla (tai muulla tavalla) koordinaattien keskiarvot $\mu_{\boldsymbol{x}}$ ja $\mu_{\boldsymbol{y}}$, $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \mu_{\boldsymbol{x}}\mathbf{1}$, $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} - \mu_{\boldsymbol{y}}\mathbf{1}$ sekä vektoreiden $\boldsymbol{x}'$ ja $\boldsymbol{y}'$ välisen kulman kosini. Merkintä $\mathbf{1}$ tarkoittaa vektoria $(1,1,1,1,1,1,1,1)$.

   Mallivastaus: $\mu_{\boldsymbol{x}} = \frac{7}{2}$ ja $\mu_{\boldsymbol{y}} = \frac{27}{8}$, $\boldsymbol{x}' = \frac{1}{2}(-5,1,5,-3,-5,1,7,-1)$, $\boldsymbol{y}' = \frac{1}{8}(21,-11,-19,13,5,-11,-11,13)$. Suoraan laskemalla $\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{y}' = -\frac{47}{2}$, $\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{x}' = 34$ ja $\boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{y}' = \frac{191}{8}$. Näiden perusteella saadaan kysytty kosini:

$$\frac{\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{y}'}{||\boldsymbol{x}'||\,||\boldsymbol{y}||'} = \frac{-\frac{47}{2}}{\sqrt{34}\sqrt{\frac{191}{8}}} = -\frac{47}{\sqrt{3247}} = -0.8248\ldots$$