

Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra (2023)

Demonstratio 6 12.12.2023

1. Merkitään $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ ja $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ ja määritellään $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2$. Osoita, että (\mathbf{x}, \mathbf{y}) on sisätulo. Ohje: Esitä (\mathbf{x}, \mathbf{y}) muodossa $\mathbf{x}^T M \mathbf{y}$, missä M on positiividefiniitti matriisi. Kts. Demo 4, tehtävä 9 ja Demo 4, tehtävät 1 ja 2.
2. Valitaan tason paikkavektoriksi $\mathbf{r} = (2, 1, 3)$ ja suuntavektoreiksi $\mathbf{s}_1 = (1, 2, 1)$ ja $\mathbf{s}_2 = (0, 2, -1)$. Selvitä tason normaali- ja koordinaattimuodot sekä kuuluuko piste $(4, 3, 6)$ tasolle.
3. Valitaan suoran paikkavektoriksi $\mathbf{r} = (1, 0, 2)$ ja suuntavektoriksi $\mathbf{s} = (1, 4, -2)$. Etsi suoran koordinaattimuoto ja selvitä kuuluuko piste $(3, 2, 1)$ suoralle.
4. Osoita, että vektorit $(1, 0, 1, 1, 1)$ ja $(0, 1, 0, 1, 1)$ ovat lineaarisesti riippumattomat avaruudessa \mathbb{F}_2^5 . Luettele vektorit, jotka kuuluvat näiden generoimaan aliavaruuteen C ja totea suoraan laskemalla, että aliavaruuteen C kuuluvien vektoreiden välinen Hamming-etäisyys on ainakin 3.
5. Valitaan edellisen tehtävän vektorit koodin generoijamatriisin riveiksi: $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ja määritellään koodausfunktio $\mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{F}_2^5$ seuraavasti: $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}G$, missä $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^2$ käsitetään rivivektoriksi. Määritä kaikkien avaruuden \mathbb{F}_2^2 alkioiden kuvat.
6. Muodosta edellisen tehtävän koodille tarkistusmatriisi. Ohje: Jos G on muotoa $G = (I \ G_1)$, niin tarkistusmatriisi saadaan muodossa $H = (G_1^T \ I)$. Totea suoraan laskemalla, että $GH^T = O$ (nollamatriisi). Laske myös $H(1, 0, 1, 1, 0)^T$ ja $H(1, 0, 1, 1, 1)^T$.
7. Laske edellisen tehtävän tarkistusmatriisin avulla koodille syndromeja $H\mathbf{x}^T$ alkaen avaruuden \mathbb{F}_2^5 Hamming-painon suhteen kevyimmistä alkioista \mathbf{x} niin kauan, että kaikki 8 syndromia on löydetty. Vihje 1: Mitä huomaat Hamming-painon 1 omaavien sanojen \mathbf{x} syndromeista? Vihje 2: Hamming-painossa 2 kannattaa aloittaa sanoista $(1, 0, 0, 1, 0)$ ja $(1, 0, 0, 0, 1)$.
8. Valitse jokin alkio $\mathbf{y} \neq (0, 0)$ avaruudesta \mathbb{F}_2^2 ja laske tälle vastaava koodisana $\mathbf{x} = \mathbf{y}G \in \mathbb{F}_2^5$. Valitse myös jokin luonnollisen kannan vektori $\mathbf{e}_i \in \mathbb{F}_2^5$ ja laske $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{e}_i$. Mikä tulkinta on vektorilla \mathbf{x}' ?
9. Laske vektoria \mathbf{x}' vastaava syndromi ja päättele sen perusteella missä kohtaa vektoria \mathbf{x} on tapahtunut bittivirhe.