Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra (2023)

Demonstraatio 6 12.12.2023

1. Merkitään $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$ ja $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T$ ja määritellään $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2$. Osoita, että $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ on sisätulo. Ohje: Esitä $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ muodossa $\boldsymbol{x}^T M \boldsymbol{y}$, missä M on positiividefiniitti matriisi. Kts. Demo 4, tehtävä 9 ja Demo 4, tehtävät 1 ja 2.

   Mallivastaus:

$$
\begin{aligned}
& 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2 = x_1(2y_1 - 3y_2) + x_2(-3x_1 + 5y_2) \\
= \quad & (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} 2y_1 - 3y_2 \\ -3y_1 + 5y_2 \end{pmatrix} = (x_1 \; x_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

   Matriisi M on symmetrinen ja sen ominaisarvoyhtälön

$$
\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{7 \pm \sqrt{45}}{2}.
$$

   Molemmat ominaisarvot ovat positiivisia, joten matriisi on positiividefiniitti.

2. Valitaan tason paikkavektoriksi $\boldsymbol{r} = (2, 1, 3)$ ja suuntavektoreiksi $\boldsymbol{s}_1 = (1, 2, 1)$ ja $\boldsymbol{s}_2 = (0, 2, -1)$. Selvitä tason normaali- ja koordinaattimuodot sekä kuuluuko piste $(4, 3, 6)$ tasolle.

   Mallivastaus: Aluksi voidaan todeta että $\boldsymbol{s}_1$ ei ole vektorin $\boldsymbol{s}_2$ skalaarimonikerta (vrt. 1. koordinaatteja), joten nämä generoivat kaksiulotteisen aliavaruuden. Tason normaalivektori saadaan ristitulon avulla:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{n} \quad &= \quad \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \quad -4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} = (-4, 1, 2).
\end{aligned}
$$

   Tason normaalimuoto on

$$
(-4, 1, 2) \cdot ((x, y, z) - (2, 1, 3)) = 0,
$$

   ja pistetulot laskemalla saadaan koordinaattimuoto:

$$
-4x + y + 2z = -1.
$$

   Sijoittamalla tähän $(x, y, z) = (4, 3, 6)$ todetaan että yhtälö toteutuu, joten piste kuuluu tasolle.

3. Valitaan suoran paikkavektoriksi $\boldsymbol{r} = (1, 0, 2)$ ja suuntavektoriksi $\boldsymbol{s} = (1, 4, -2)$. Etsi suoran koordinaattimuoto ja selvitä kuuluuko piste $(3, 2, 1)$ suoralle.

   Mallivastaus: Parametrimuoto on $(x, y, z) = (1, 0, 2) + t(1, 4, -2) = (1 + t, 4t, 2 - 2t)$, josta

$$
t = x - 1 = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{-2}.
$$

   Sijoittamalla tähän $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ todetaan että piste ei kuulu suoralle.

4. Osoita, että vektorit $(1,0,1,1,1)$ ja $(0,1,0,1,1)$ ovat lineaarisesti riippumattomat avaruudessa $\mathbb{F}_2^5$. Luettele vektorit, jotka kuuluvat näiden generoimaan aliavaruuteen C ja totea suoraan laskemalla, että aliavaruuteen C kuuluvien vektoreiden välinen Hamming-etäisyys on ainakin 3.

   Mallivastaus: Riippumattomuus seuraa suoraan vertaamalla esim. 1. koordinaatteja. Itse asiassa avaruuden $\mathbb{F}_2^n$ kaksi vektoria $\boldsymbol{x}_1$ ja $\boldsymbol{x}_2$ ovat lineaarisesti riippumattomat aina jos ne ovat erisuuret (miksi?) Näiden vektoreiden generoimaan aliavaruuteen kuuluvat $(0,0,0,0,0)$, $(1,0,1,1,1)$, $(0,1,0,1,1)$, sekä $(1,0,1,1,1)+(0,1,0,1,1)=(1,1,1,0,0)$. Hamming-etäisyyksistä voidaan laatia seuraava taulukko:

	$(0,0,0,0,0)$	$(1,0,1,1,1)$	$(0,1,0,1,1)$	$(1,1,1,0,0)$
$(0,0,0,0,0)$	0	4	3	3
$(1,0,1,1,1)$	4	0	3	3
$(0,1,0,1,1)$	3	3	0	4
$(1,1,1,0,0)$	3	3	4	0

   Taulukosta nähdään että aliavaruuden C erisuurten vektoreiden välinen Hamming-etäisyys on vähintään 3.

5. Valitaan edellisen tehtävän vektorit koodin generoijamatriisin riveiksi: $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ja määritellään koodausfunktio $\mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2^5$ seuraavasti: $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}G$, missä $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^2$ käsitetään rivivektoriksi. Määritä kaikkien avaruuden $\mathbb{F}_2^2$ alkioiden kuvat.

   Mallivastaus: $(0,0)G = (0,0,0,0,0)$, $(0,1)G = (0,1,0,1,1)$, $(1,0)G = (1,0,1,1,1)$, $(1,1)G = (1,1,1,0,0)$. Kuvat ovat siis täsmälleen aliavaruuden G alkiot.

6. Muodosta edellisen tehtävän koodille tarkistusmatriisi. Ohje: Jos G on muotoa $G = (I\ G_1)$, niin tarkistusmatriisi saadaan muodossa $H = (G_1^T\ I)$. Totea suoraan laskemalla, että $GH^T = O$ (nollamatriisi). Laske myös $H(1,0,1,1,0)^T$ ja $H(1,0,1,1,1)^T$.

   Mallivastaus:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Suoralla laskulla nähdään, että

$$GH^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   ja että $H(1,0,1,1,0)^T = (0,0,1)^T$ ja $H(1,0,1,1,1)^T = (0,0,0)^T$

7. Laske edellisen tehtävän tarkistusmatriisin avulla koodille syndromeja $H\boldsymbol{x}^T$ alkaen avaruuden $\mathbb{F}_2^5$ Hamming-painon suhteen kevyimmistä alkioista $\boldsymbol{x}$ niin kauan, että kaikki 8 syndromia on löydetty. Vihje 1: Mitä huomaat Hamming-painon 1 omaavien sanojen $\boldsymbol{x}$ syndromeista? Vihje 2: Hamming-painossa 2 kannattaa aloittaa sanoista $(1,0,0,1,0)$ ja $(1,0,0,0,1)$.

Mallivastaus: $H(0,0,0,0,0)^T = (0,0,0)^T$, $H(0,0,0,0,1)^T = (0,0,1)^T$, $H(0,0,0,1,0)^T = (0,1,0)^T$, $H(0,0,1,0,0)^T = (1,0,0)^T$, $H(0,1,0,0,0)^T = (0,1,1)^T$ ja $H(1,0,0,0,0)^T = (1,1,1)^T$. Hamming-painoa 1 olevien sanojen syndromit ovat siis tarkistusmatriisin H sarakkeet. Siirryttäessä Hamming-painoa 2 oleviin sanoihin todetaan, että $H(1,0,0,1,0) = (1,0,1)^T$, $H(1,0,0,0,1)^T = (1,1,0)^T$ ja tässä vaiheessa voidaan todeta, että kaikki avaruuden $\mathbb{F}_2^3$ vektorit on jo saatu syndromeina.

8. Valitse jokin alkio $\boldsymbol{y} \neq (0,0)$ avaruudesta $\mathbb{F}_2^2$ ja laske tälle vastaava koodisana $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}G \in \mathbb{F}_2^5$. Valitse myös jokin luonnollisen kannan vektori $\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{F}_2^5$ ja laske $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i$. Mikä tulkinta on vektorilla $\boldsymbol{x}'$?

   Mallivastaus: Valitaan esim. $\boldsymbol{y} = (1,1)$, jota vastaava koodisana on $\boldsymbol{x} = (1,1)G = (1,1,1,0,0)$. Valitaan sitten esim. $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1,0,0)$, jolloin $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_3 = (1,1,0,0,0)$. Tämä edustaa koodisanan $\boldsymbol{x}$ kolmannessa bitissä tapahtunutta virhettä.

9. Laske vektoria $\boldsymbol{x}'$ vastaava syndromi ja päättele sen perusteella missä kohtaa vektoria $\boldsymbol{x}$ on tapahtunut bittivirhe.

   Mallivastaus: $H\boldsymbol{x}'^T = (1,0,0)^T$. Aiemman tehtävän perusteella $H(0,0,1,0,0)^T = (1,0,0)^T$, joten voidaan päätellä että virhe on tapahtunut kolmannessa bitissä ja siten alun perin lähetetty koodisana on $(1,1,1,0,0)$.