

# Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra

Mika Hirvensalo  
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Turun yliopisto

2023

## Vektorikäsitteen lähtökohtia

- Suuntajanat
- Suuntajanojen esitys komponentteina
- Vektoreiden yhteenlasku
- Vastavektori
- Skalaarikertolasku

## Vektoriavaruus (äärellisulotteinen prototyyppi)

- Vektoreiden joukko  $\mathbb{R}^n$ , skalaarikunta  $\mathbb{R}$
- $c(x_1, \dots, x_n) = (cx_1, \dots, cx_n)$ ,
- $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
- Yleistys:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ , missä  $\mathbb{K}$  on jokin muu kunta.

## Huomautus

Insinöörimatematiikan kursseilla vektoreita esitetään yleensä lihavoidulla merkinnällä, esim.  $\mathbf{a}$ . Fysiikan kursseilla on tapana merkitä ylänuoli  $\vec{a}$  tai yläviiva  $\bar{a}$  ja varsinkin yksikkövektoreille käytetään hattumerkintää  $\hat{a}$ . Vanhemmassa kirjallisuudessa käytetään fraktuurakirjasinta  $\mathfrak{a}$ . Taululle (ja piirtopöydälle) kirjoitettuna lihavoinnin  $\mathbf{a}$  sijasta käytetään yleensä alaviivaa  $\underline{a}$ .

## Algebralliset ominaisuudet

Vektoreiden joukko on ns. kommutatiivinen ryhmä:

- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- $(\exists \mathbf{0})(\forall \mathbf{u})(\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u})$
- $(\forall \mathbf{u})(\exists -\mathbf{u})(\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0})$
- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

Skalaarikertolasku toteuttaa:

- $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$
- $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
- $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$
- $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$

## Määritelmä

Vektoreiden  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in V$  *linearikombinaatio* on muotoa

$$c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_n\mathbf{x}_n$$

oleva lauseke, missä  $c_1, \dots, c_n$  ovat skalaarikunnan  $\mathbb{K}$  alkioita. Kaikkien vektorijoukosta  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  muodostettujen lineaarikombinaatioiden joukosta käytetään merkintää

$$L(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \quad \text{tai} \quad \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \rangle$$

## Lause

Joukko  $L(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  on suljettu skalaarikertolaskun ja vektoriyhteenlaskun suhteen (aliavaruus).

## Määritelmä

Vektoriavaruus  $V$  on äärellisesti generoitu, jos on olemassa sellainen äärellinen joukko  $G$ , että  $V = \langle G \rangle$ .

## Esimerkki

Avaruudella  $\mathbb{R}^n$  (samoin kuin avaruudella  $\mathbb{C}^n$ ) on generoiva joukko

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1),$$

koska jokainen  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, x_n) \\ &= x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 1) \\ &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n. \end{aligned}$$

## Huomautus

Avaruudessa  $\mathbb{R}^2$  merkitään yleensä  $\mathbf{i} = (1, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1)$ .

## Huomautus

Avaruudessa  $\mathbb{R}^3$  merkitään yleensä  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$  ja  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ .

## Esimerkki

Joukko  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  generoi avaruuden  $\mathbb{R}^2$ :

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

## Esimerkki

Joukko  $\{\mathbf{i}, \mathbf{i} + \mathbf{j}\}$  generoi avaruuden  $\mathbb{R}^2$ :

$$(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + y(\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

## Esimerkki

Joukko  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{j}\}$  generoi avaruuden  $\mathbb{R}^2$ :

$$(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 0 \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j})$$



## Määritelmä

Vektorijoukko  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  on lineaarisesti riippuva, jos jokin joukon vektoreista  $\mathbf{x}_i$  voidaan esittää muiden lineaarikombinaationa:

$$\mathbf{x}_i = c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1} + c_{i+1}\mathbf{x}_{i+1} + \dots + c_n\mathbf{x}_n$$

Vastakohta: Lineaarisesti riippumaton.

## Esimerkki

Avaruuden  $\mathbb{R}^2$  vektorijoukko  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  on lineaarisesti riippumaton: Ei ole mahdollista esittää vektoria  $\mathbf{i}$  muodossa  $\mathbf{i} = c\mathbf{j}$ ,  
 $\Leftrightarrow (1, 0) = c(0, 1)$ .

## Esimerkki

Avaruuden vektorijoukko  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{j}\}$  on lineaarisesti riippuva:

$$\mathbf{i} + \mathbf{j} = 1 \cdot \mathbf{i} + 1 \cdot \mathbf{j}.$$

## Lause

Vektorijoukko  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  on lineaarisesti riippumaton tarkalleen silloin kun yhtälöllä

$$c_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

on ainoastaan ilmeinen ratkaisu  $c_1 = \dots = c_n = 0$ .

## Esimerkki

$$ai + bj = \mathbf{0} \Leftrightarrow a(1, 0) + b(0, 1) = (0, 0) \Leftrightarrow (a, b) = (0, 0),$$

mikä toteutuu vain jos  $a = 0$  ja  $b = 0$ .

## Esimerkki

$$1 \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j}) - 1 \cdot \mathbf{i} - 1 \cdot \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

## Esimerkki

Vektorijoukko

$\{(1, 2, -2, 0), (2, -3, 1, 2), (-1, 2, -2, 3), (0, -1, 2, 1)\}$  on lineaarisesti riippumaton mikäli yhtälöllä

$$\begin{aligned} c_1(1, 2, -2, 0) + c_2(2, -3, 1, 2) \\ + c_3(-1, 2, -2, 3) + c_4(0, -1, 2, 1) = (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

on vain ilmeinen ratkaisu  $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (0, 0, 0, 0)$ . Kyseinen vektoryhtälö voidaan kirjoittaa yhtälöryhmänä

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 - c_3 = 0 \\ 2c_1 - 3c_2 + 2c_3 - c_4 = 0 \\ -2c_1 + c_2 - 2c_3 + 2c_4 = 0 \\ \phantom{-2c_1} + 2c_2 + 3c_3 + c_4 = 0. \end{cases}$$

## Esimerkki

Yhtälöryhmä

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 - c_3 & = 0 \\ 2c_1 - 3c_2 + 2c_3 - c_4 & = 0 \\ -2c_1 + c_2 - 2c_3 + 2c_4 & = 0 \\ \phantom{-2c_1} + 2c_2 + 3c_3 + c_4 & = 0 \end{cases}$$

on ekvivalentti yhtälöryhmän

$$\begin{cases} c_1 & = 0 \\ \phantom{c_1} + c_2 & = 0 \\ \phantom{c_1} + \phantom{c_2} + c_3 & = 0 \\ \phantom{c_1} + \phantom{c_2} + \phantom{c_3} + c_4 & = 0 \end{cases}$$

kanssa. Ainoa ratkaisu on siis  $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (0, 0, 0, 0)$ .