Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

Aliavaruus

Määritelmä

U on vektoriavaruuden V *aliavaruus* (Merk. $U \leq V$), jos $U \subseteq V$ ja U on suljettu skalaarimonikerran ja vektorisummauksen suhteen. Toisin sanoen, jos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$, niin myös $a\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in U$

Aliavaruus

Määritelmä

U on vektoriavaruuden V *aliavaruus* (Merk. $U \leq V$), jos $U \subseteq V$ ja U on suljettu skalaarimonikerran ja vektorisummauksen suhteen. Toisin sanoen, jos $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in U$, niin myös $a\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in U$

Esimerkki

Jos $\boldsymbol{x}_1$, ..., $\boldsymbol{x}_n \in V$, on $L(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \leq V$.

Lineaarinen riippuvuus

Määritelmä

Vektorijoukko $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ on lineaarisesti riippuva, jos jokin joukon vektoreista $\boldsymbol{x}_i$ voidaan esittää muiden lineaarikombinaationa:

$$\boldsymbol{x}_i = c_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\boldsymbol{x}_{i-1} + \boldsymbol{c}_{i+1}\boldsymbol{x}_{i+1} + \ldots + c_n\boldsymbol{x}_n$$

Vastakohta: Lineaarisesti riippumaton.

Määritelmä

Vektorijoukko $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ on lineaarisesti riippuva, jos jokin joukon vektoreista $\boldsymbol{x}_i$ voidaan esittää muiden lineaarikombinaationa:

$$\boldsymbol{x}_i = c_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\boldsymbol{x}_{i-1} + \boldsymbol{c}_{i+1}\boldsymbol{x}_{i+1} + \ldots + c_n\boldsymbol{x}_n$$

Vastakohta: Lineaarisesti riippumaton.

Lause

Vektorijoukko $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ on lineaarisesti riippumaton tarkalleen silloin kun yhtälöllä

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{x}_n = \mathbf{0}$$

on ainoastaan ilmeinen ratkaisu $c_1 = \ldots = c_n = 0$.

Esimerkki

Jos nollasta poikkeavien vektoreiden joukko $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_k\}$ on sellainen, että vektorissa $\boldsymbol{x}_{i+1}$ on enemmän alkunollia kuin vektorissa $\boldsymbol{x}_i$, on joukko lineaarisesti riippumaton.

Esimerkki

Jos nollasta poikkeavien vektoreiden joukko $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_k\}$ on sellainen, että vektorissa $\boldsymbol{x}_{i+1}$ on enemmän alkunollia kuin vektorissa $\boldsymbol{x}_i$, on joukko lineaarisesti riippumaton.

Erikoistapaus edellisestä

$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, …, $\boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$.

Määritelmä

Vektoriavaruuden V osajoukko B on *kanta*, jos

- $V = \langle B \rangle$
- B on lineaarisesti riippumaton

Kanta

Määritelmä

Vektoriavaruuden V osajoukko B on *kanta*, jos

- $V = \langle B \rangle$
- B on lineaarisesti riippumaton

Huomautus

Edellisen määritelmän perusteella kanta on aina vektoriavaruuden generoivan joukon osajoukko, minimaalinen generoiva joukko. Jos siis vektoriavaruus on äärellisesti generoitu, on sillä myös äärellinen kanta.

Määritelmä

Vektoriavaruuden V osajoukko B on *kanta*, jos

- $V = \langle B \rangle$
- B on lineaarisesti riippumaton

Huomautus

Edellisen määritelmän perusteella kanta on aina vektoriavaruuden generoivan joukon osajoukko, minimaalinen generoiva joukko. Jos siis vektoriavaruus on äärellisesti generoitu, on sillä myös äärellinen kanta.

Lause

Äärellisesti generoidun vektoriavaruuden kaikissa kannoissa on yhtä monta alkiota.

Lause

Äärellisesti generoidun vektoriavaruuden V osajoukko $B = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ on kanta tarkalleen silloin kun jokaisella $\boldsymbol{v} \in V$ on yksikäsitteinen esitys

$$\boldsymbol{v} = c_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + c_n \boldsymbol{b}_n.$$

Kanta

Lause

Äärellisesti generoidun vektoriavaruuden V osajoukko $B = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ on kanta tarkalleen silloin kun jokaisella $\boldsymbol{v} \in V$ on yksikäsitteinen esitys

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{b}_n.$$

Määritelmä

Olkoot merkinnät kuten yllä. Vektorin $\boldsymbol{v} \in V$ *koordinaattivektori* kannan B suhteen on

$$\boldsymbol{v}_B = (c_1, \ldots, c_n)$$

Kanta

Lause

Äärellisesti generoidun vektoriavaruuden V osajoukko $B = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ on kanta tarkalleen silloin kun jokaisella $\boldsymbol{v} \in V$ on yksikäsitteinen esitys

$$\boldsymbol{v} = c_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + c_n \boldsymbol{b}_n.$$

Määritelmä

Olkoot merkinnät kuten yllä. Vektorin $\boldsymbol{v} \in V$ *koordinaattivektori* kannan B suhteen on

$$\boldsymbol{v}_B = (c_1, \ldots, c_n)$$

Lause

Olkoot merkinnät jälleen kuten edellä. Kuvaus $\mathcal{C}_B : V \to \mathbb{K}^n$, $\mathcal{C}_B(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}_B$ on bijektio.

Lause

Kuvaus $\mathcal{C}_B : V \to \mathbb{K}^n$ toteuttaa ehdon

$$\mathcal{C}_B(a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2) = a\mathcal{C}_B(\boldsymbol{v}_1) + b\mathcal{C}_B(\boldsymbol{v}_2).$$

Tämän ehdon toteuttavia kuvauksia sanotaan *lineaarisiksi*.

Lause

Kuvaus $\mathcal{C}_B : V \to \mathbb{K}^n$ toteuttaa ehdon

$$\mathcal{C}_B(a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2) = a\mathcal{C}_B(\mathbf{v}_1) + b\mathcal{C}_B(\mathbf{v}_2).$$

Tämän ehdon toteuttavia kuvauksia sanotaan *lineaarisiksi*.

Huomautus

Edellisen lauseen perusteella äärellisesti generoitu vektoriavaruus V (yli kunnan $\mathbb{K}$) voidaan samaistaa karteesisen tulon $\mathbb{K}^n$ kanssa, missä vektoriavaruuden operaatiot määritellään seuraavasti:

$$(v_1, \ldots, v_n) + (u_1, \ldots, u_n) = (v_1 + u_1, \ldots, v_n + u_n)$$

ja

$$c(v_1, \ldots, v_n) = (cv_1, \ldots, cv_n).$$

Esimerkki

Joukko $\mathbb{R}[x]_{\leq 3} = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leq 3\}$ on vektoriavaruus yli kunnan $\mathbb{R}$.

Esimerkki

Joukko $\mathbb{R}[x]_{\leq 3} = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leq 3\}$ on vektoriavaruus yli kunnan $\mathbb{R}$. Yksi kanta on $B = \{1, x, x^2, x^3\}$, jolloin jokainen $p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

ja

$$\mathcal{C}_B(p) = (c_0, c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^4$$

Kanta

Esimerkki

Joukko $\mathbb{R}[x]_{\leq 3} = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leq 3\}$ on vektoriavaruus yli kunnan $\mathbb{R}$. Yksi kanta on $B = \{1, x, x^2, x^3\}$, jolloin jokainen $p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

ja

$$\mathcal{C}_B(p) = (c_0, c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^4$$

Esimerkki

Myös joukko $B_2 = \{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)\}$ muodostaa avaruuden $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ kannan.

Esimerkki

Joukko $\mathbb{R}[x]_{\leq 3} = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leq 3\}$ on vektoriavaruus yli kunnan $\mathbb{R}$. Yksi kanta on $B = \{1, x, x^2, x^3\}$, jolloin jokainen $p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

ja

$$\mathcal{C}_B(p) = (c_0, c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^4$$

Esimerkki

Myös joukko $B_2 = \{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)\}$ muodostaa avaruuden $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ kannan.

$$\mathcal{C}_{B_2}(p) = ?$$

Kanta

Esimerkki

Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko $E = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, $\boldsymbol{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ on kanta, ja jokainen $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ voidaan esittää muodossa

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + v_n\boldsymbol{e}_n,$$

Kanta

Esimerkki

Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko $E = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, $\boldsymbol{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ on kanta, ja jokainen $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ voidaan esittää muodossa

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + v_n\boldsymbol{e}_n,$$

joten

$$\mathcal{C}_E(\boldsymbol{v}) = (v_1, \ldots, v_n) = \boldsymbol{v}.$$

Kanta

Esimerkki

Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko $E = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, $\boldsymbol{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ on kanta, ja jokainen $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ voidaan esittää muodossa

$$\boldsymbol{v} = v_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + v_n \boldsymbol{e}_n,$$

joten

$$\mathcal{C}_E(\boldsymbol{v}) = (v_1, \ldots, v_n) = \boldsymbol{v}.$$

Kantaa E sanotaan tämän vuoksi *luonnolliseksi kannaksi*.

Esimerkki

Joukko $\{(1, 2, -1, 3), (2, -1, 2, 1), (-2, -3, 1, 2), (1, 2, -3, 1)\}$ muodostaa $\mathbb{R}^4$:n kannan.

Kanta

Esimerkki

Joukko $\{(1,2,-1,3),(2,-1,2,1),(-2,-3,1,2),(1,2,-3,1)\}$ muodostaa $\mathbb{R}^4$:n kannan. Mikä on vektorin $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ esitys tässä kannassa?

$$\begin{aligned}(x,y,z,w) &= c_1(1,2,-1,3)+c_2(2,-1,2,1)\\ &+ c_3(-2,-3,1,2)+c_4(1,2,-3,1)\end{aligned}$$

Esimerkki

Joukko $\{(1,2,-1,3),(2,-1,2,1),(-2,-3,1,2),(1,2,-3,1)\}$ muodostaa $\mathbb{R}^4$:n kannan. Mikä on vektorin $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ esitys tässä kannassa?

$$\begin{aligned}(x,y,z,w) &= c_1(1,2,-1,3)+c_2(2,-1,2,1)\\ &+ c_3(-2,-3,1,2)+c_4(1,2,-3,1)\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} c_1 & +2c_2 & -2c_3 & +c_4 & = & x \\ 2c_1 & -c_2 & -3c_3 & +2c_4 & = & y \\ -c_1 & +2c_2 & +c_3 & -3c_4 & = & z \\ 3c_1 & +c_2 & +2c_3 & +c_4 & = & w \end{array}\right.$$

Gaussin-Jordanin menetelmä

Määritelmä

Muuttujien x_1, x_2, ... x_n yhtälöryhmä on *lineaarinen*, jos muuttujat esiintyvät siinä vain ensimmäisessä asteessa:

$$\begin{cases} A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & \dots & + & A_{1n}x_n & = & b_1 \\ A_{21}x_1 & + & A_{22}x_2 & + & \dots & + & A_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \vdots & & \ddots & & & \vdots & \\ A_{m1}x_1 & + & A_{m2}x_2 & + & \dots & + & A_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Määritelmä

Muuttujien $x_1, x_2, \ldots x_n$ yhtälöryhmä on *lineaarinen*, jos muuttujat esiintyvät siinä vain ensimmäisessä asteessa:

$$\begin{cases} A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & \ldots & + & A_{1n}x_n & = & b_1 \\ A_{21}x_1 & + & A_{22}x_2 & + & \ldots & + & A_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \vdots & & \ddots & & & \vdots & \\ A_{m1}x_1 & + & A_{m2}x_2 & + & \ldots & + & A_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Lineaarista yhtälöryhmää sanotaan *homogeeniseksi*, jos $b_1 = \ldots = b_m = 0$.

Gaussin-Jordanin menetelmä

Lineaaristen yhtälöryhmien alkeisoperaatiot

- Kahden yhtälön järjestyksen vaihtaminen
- Yhtälön kertominen nollasta eroavalla vakiolla
- Yhtälön lisääminen toiseen vakiolla kerrottuna

Gaussin-Jordanin menetelmä

Lineaaristen yhtälöryhmien alkeisoperaatiot

- Kahden yhtälön järjestyksen vaihtaminen
- Yhtälön kertominen nollasta eroavalla vakiolla
- Yhtälön lisääminen toiseen vakiolla kerrottuna

Lause

Yhtälöryhmillä, jotka saadaan toisistaan alkeisperaatioilla on samat ratkaisut.

Gausin-Jordanin menetelmä

Lineaaristen yhtälöryhmien alkeisoperaatiot

- Kahden yhtälön järjestyksen vaihtaminen
- Yhtälön kertominen nollasta eroavalla vakiolla
- Yhtälön lisääminen toiseen vakiolla kerrottuna

Lause

Yhtälöryhmillä, jotka saadaan toisistaan alkeisperaatioilla on samat ratkaisut.

Määritelmä

Jos yhtälöryhmä S_2 saadaan yhtälöryhmästä S_1 alkeisoperaatioilla, sanotaan että S_1 on riviekvivalentti S_2:n kanssa ja merkitään $S_1 \sim S_2$.

Lineaaristen yhtälöryhmien alkeisoperaatiot

- Kahden yhtälön järjestyksen vaihtaminen
- Yhtälön kertominen nollasta eroavalla vakiolla
- Yhtälön lisääminen toiseen vakiolla kerrottuna

Lause

Yhtälöryhmillä, jotka saadaan toisistaan alkeisperaatioilla on samat ratkaisut.

Määritelmä

Jos yhtälöryhmä S_2 saadaan yhtälöryhmästä S_1 alkeisoperaatioilla, sanotaan että S_1 on riviekvivalentti S_2:n kanssa ja merkitään $S_1 \sim S_2$. Huom.: $\sim$ on ns. ekvivalenssirelaatio.

Gaussin-Jordanin menetelmä

Esimerkki

$$\left\{\begin{array}{cccccl} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 7 & \\ x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & 0 & \end{array}\right. (-2)$$

Esimerkki

$$
\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 7 \\ x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & 0 \end{cases} \circlearrowleft (-2)
$$

$$
\sim \begin{cases} & -7x_2 & -7x_3 & = & 7 & \mid \cdot(-\frac{1}{7}) \\ x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & 0 \end{cases} \updownarrow
$$

Esimerkki

$$
\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 7 \\ x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & 0 \end{cases} \circlearrowleft (-2)
$$

$$
\sim \begin{cases} & -7x_2 & -7x_3 & = & 7 & \mid \cdot(-\frac{1}{7}) \\ x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & 0 & \end{cases} \updownarrow
$$

$$
\sim \begin{cases} x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & = & -1 \end{cases} \circlearrowleft (-3)
$$

Esimerkki

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 7 \\ x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & 0 \end{cases} \circlearrowleft (-2) \\
\sim\ &\begin{cases} & -7x_2 & -7x_3 & = & 7 & \mid \cdot(-\frac{1}{7}) \\ x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & 0 & \end{cases} \updownarrow \\
\sim\ &\begin{cases} x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & = & -1 \end{cases} \circlearrowleft (-3) \\
\sim\ &\begin{cases} x_1 & & +x_3 & = & 3 \\ & x_2 & +x_3 & = & -1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Esimerkki

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 7 \\ x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & 0 \end{cases} \circlearrowright (-2) \\
\sim &\begin{cases} & -7x_2 & -7x_3 & = & 7 & \mid \cdot(-\frac{1}{7}) \\ x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & 0 \end{cases} \updownarrow \\
\sim &\begin{cases} x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & = & -1 \end{cases} \circlearrowright (-3) \\
\sim &\begin{cases} x_1 & & +x_3 & = & 3 \\ & x_2 & +x_3 & = & -1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ratkaisut:

$(x_1, x_2, x_3) = (-x_3 + 3, -x_3 - 1, x_3) = x_3(-1, -1, 1) + (3, -1, 0)$, missä $x_3 \in \mathbb{R}$.

Huomautus

Alkeisoperaatiot suoritetaan yhtälöryhmän kertoimilla, eikä muuttujien merkitseminen ole välttämätöntä:

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 7 \\ x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Huomautus

Alkeisoperaatiot suoritetaan yhtälöryhmän kertoimilla, eikä muuttujien merkitseminen ole välttämätöntä:

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 7 \\ x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2 \cdot x_1 & -1 \cdot x_2 & +1 \cdot x_3 & = & 7 \\ 1 \cdot x_1 & +3 \cdot x_2 & +4 \cdot x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Gaussin-Jordanin menetelmä

Huomautus

Alkeisoperaatiot suoritetaan yhtälöryhmän kertoimilla, eikä muuttujien merkitseminen ole välttämätöntä:

$$
\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 7 \\ x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & 0 \end{cases}
$$

$$
\rightarrow \begin{cases} 2 \cdot x_1 & -1 \cdot x_2 & +1 \cdot x_3 & = & 7 \\ 1 \cdot x_1 & +3 \cdot x_2 & +4 \cdot x_3 & = & 0 \end{cases}
$$

$$
\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}
$$

Määritelmä

Lineaarisen yhtälöryhmän

$$\begin{cases} A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & \dots & + & A_{1n}x_n & = & b_1 \\ A_{21}x_1 & + & A_{22}x_2 & + & \dots & + & A_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \vdots & & \ddots & & & \vdots & \\ A_{m1}x_1 & + & A_{m2}x_2 & + & \dots & + & A_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

kerroinmatriisi on

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}.$$

Määritelmä

Lineaarisen yhtälöryhmän

$$\begin{cases} A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & \dots & + & A_{1n}x_n & = & b_1 \\ A_{21}x_1 & + & A_{22}x_2 & + & \dots & + & A_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \vdots & & \ddots & & & \vdots & \\ A_{m1}x_1 & + & A_{m2}x_2 & + & \dots & + & A_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

augmentoitu (eli laajennettu) matriisi on

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} & b_1 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Gaussin-Jordanin menetelmä

Matriisien alkeisoperaatiot

- Kahden rivin järjestyksen vaihtaminen
- Rivin kertominen nollasta eroavalla vakiolla
- Rivin lisääminen toiseen vakiolla kerrottuna

Matriisien alkeisoperaatiot

- Kahden rivin järjestyksen vaihtaminen
- Rivin kertominen nollasta eroavalla vakiolla
- Rivin lisääminen toiseen vakiolla kerrottuna

Määritelmä

Jos matriisi B saadaan matriisista A alkeisoperaatioilla, sanotaan että matriisi A on riviekvivalentti B:n kanssa ja merkitään $A \sim B$.

Matriisien alkeisoperaatiot

- Kahden rivin järjestyksen vaihtaminen
- Rivin kertominen nollasta eroavalla vakiolla
- Rivin lisääminen toiseen vakiolla kerrottuna

Määritelmä

Jos matriisi B saadaan matriisista A alkeisoperaatioilla, sanotaan että matriisi A on riviekvivalentti B:n kanssa ja merkitään $A \sim B$. Huom.: $A \sim B$ on ns. ekvivalenssirelaatio.

Määritelmä

Matriisi A on *porrasmuodossa*, jos sen jokainen rivi alkaa nollilla, joita on enemmän kuin millään ylemmällä rivillä. Ensimmäisen rivin ei tarvitse alkaa nollalla ja jostain rivistä alkaen rivit voivat koostua kokonaan nollista.

Määritelmä

Matriisi A on *porrasmuodossa*, jos sen jokainen rivi alkaa nollilla, joita on enemmän kuin millään ylemmällä rivillä. Ensimmäisen rivin ei tarvitse alkaa nollalla ja jostain rivistä alkaen rivit voivat koostua kokonaan nollista.

Esimerkki

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ \cdot & 5 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Pisteet merkitsevät nollia.

Gaussin-Jordanin menetelmä

Matriisi A on *redusoidussa porrasmuodossa*, jos

- A on porrasmuodossa
- A:n jokaisen rivin ensimmäinen nollasta poikkeava alkio on 1.
- A:n jokaisen rivin ensimmäisen nollasta poikkeavan alkion yläpuolella on vain nollia.

Matriisi A on *redusoidussa porrasmuodossa*, jos

- A on porrasmuodossa
- A:n jokaisen rivin ensimmäinen nollasta poikkeava alkio on 1.
- A:n jokaisen rivin ensimmäisen nollasta poikkeavan alkion yläpuolella on vain nollia.

Esimerkki

$$\begin{pmatrix}
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & * & * & \cdot & \cdot & * & * & * & \cdot & * \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & * & * & \cdot & \cdot & * & * & * & \cdot & * \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & * & * & \cdot & \cdot & * & * & * & \cdot & * \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & * & * & * & \cdot & * \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & * & * & * & \cdot & * \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & * \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}$$

Pisteet merkitsevät nollia ja asteriskit mitä tahansa lukuja.

Esimerkki

Vektorijoukko
$\{(1,2,-2,0),(2,-3,1,2),(-1,2,-2,3),(0,-1,2,1)\}$ on
lineaarisesti riippumaton mikäli yhtälöllä

$$\begin{aligned}
&c_1(1,2,-2,0)+c_2(2,-3,1,2)\\
&+c_3(-1,2,-2,3)+c_4(0,-1,2,1)=(0,0,0,0)
\end{aligned}$$

on vain ilmeinen ratkaisu $(c_1,c_2,c_3,c_4)=(0,0,0,0)$.

Esimerkki

Vektorijoukko
$\{(1,2,-2,0),(2,-3,1,2),(-1,2,-2,3),(0,-1,2,1)\}$ on lineaarisesti riippumaton mikäli yhtälöllä

$$\begin{aligned} &c_1(1,2,-2,0)+c_2(2,-3,1,2)\\ &+c_3(-1,2,-2,3)+c_4(0,-1,2,1)=(0,0,0,0)\end{aligned}$$

on vain ilmeinen ratkaisu $(c_1,c_2,c_3,c_4)=(0,0,0,0)$. Kyseinen vektoriyhtälö voidaan kirjoittaa yhtälöryhmänä

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} c_1 & +2c_2 & -c_3 & & = & 0\\ 2c_1 & -3c_2 & +2c_3 & -c_4 & = & 0\\ -2c_1 & +c_2 & -2c_3 & +2c_4 & = & 0\\ & 2c_2 & +3c_3 & +c_4 & = & 0\end{array}\right.$$

Gaussin-Jordanin menetelmä

Kerroinmatriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Kerroinmatriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Gaussin-Jordanin menetelmä

Kerroinmatriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Kerroinmatriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Kerroinmatriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{15}{7} & \frac{9}{7} \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Gaussin-Jordanin menetelmä

Kerroinmatriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{15}{7} & \frac{9}{7} \\ 0 & 0 & \frac{41}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

Gaussin-Jordanin menetelmä

Kerroinmatriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{41}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

Kerroinmatriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{148}{35} \end{pmatrix}$$

Kerroinmatriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kerroinmatriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kerroinmatriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kerroinmatriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gaussin-Jordanin menetelmä

Kerroinmatriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Johtopäätös

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} c_1 & +2c_2 & -c_3 & & = & 0 \\ 2c_1 & -3c_2 & +2c_3 & -c_4 & = & 0 \\ -2c_1 & +c_2 & -2c_3 & +2c_4 & = & 0 \\ & 2c_2 & +3c_3 & +c_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llllcl} c_1 & & & & = & 0 \\ & c_2 & & & = & 0 \\ & & c_3 & & = & 0 \\ & & & c_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Johtopäätös

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 - c_3 = 0 \\ 2c_1 - 3c_2 + 2c_3 - c_4 = 0 \\ -2c_1 + c_2 - 2c_3 + 2c_4 = 0 \\ 2c_2 + 3c_3 + c_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \end{cases}$$

Näin ollen $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (0, 0, 0, 0)$ on ainoa ratkaisu

Esimerkki

Matriisia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

vastaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 \quad +2x_3 = 4 \\ x_2 \quad -x_3 = -3 \\ x_4 = -1 \end{cases},$$

Esimerkki

Matriisia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

vastaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 \quad +2x_3 = 4 \\ x_2 \quad -x_3 = -3 \\ x_4 = -1 \end{cases},$$

josta $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2x_3 + 4, x_3 - 3, x_3, -1) =$
$(-2x_3, x_3, x_3, 0) + (4, -3, 0, -1) = x_3(-2, 1, 1, 0) + (4, -3, 0, -1)$.

Ratkaisujoukon esittäminen

Huomautus

"portaan aloittavat" muuttujat esitetään muiden avulla, muut jäävät esitykseen.

Ratkaisujoukon esittäminen

Huomautus

"portaan aloittavat" muuttujat esitetään muiden avulla, muut jäävät esitykseen.

Esimerkki

$$\begin{cases} x_1 & & & -4x_4 & -6x_5 & = & -2 \\ & x_2 & & +3x_4 & & = & 3 \\ & & x_3 & +x_4 & +2x_5 & = & 7 \end{cases}$$

Ratkaisujoukon esittäminen

Huomautus

"portaan aloittavat" muuttujat esitetään muiden avulla, muut jäävät esitykseen.

Esimerkki

$$\begin{cases} x_1 & & & -4x_4 & -6x_5 & = & -2 \\ & x_2 & & +3x_4 & & = & 3 \\ & & x_3 & +x_4 & +2x_5 & = & 7 \end{cases}$$

Ratkaisut:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

Huomautus

"portaan aloittavat" muuttujat esitetään muiden avulla, muut jäävät esitykseen.

Esimerkki

$$\begin{cases} x_1 & & & -4x_4 & -6x_5 & = & -2 \\ & x_2 & & +3x_4 & & = & 3 \\ & & x_3 & +x_4 & +2x_5 & = & 7 \end{cases}$$

Ratkaisut:

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \\ = \; & (4x_4 + 6x_5 - 2, -3x_4 + 3, -x_4 - 2x_5 + 7, x_4, x_5) \end{aligned}$$

Ratkaisujoukon esittäminen

Huomautus

"portaan aloittavat" muuttujat esitetään muiden avulla, muut jäävät esitykseen.

Esimerkki

$$\begin{cases} x_1 & & & -4x_4 & -6x_5 & = & -2 \\ & x_2 & & +3x_4 & & = & 3 \\ & & x_3 & +x_4 & +2x_5 & = & 7 \end{cases}$$

Ratkaisut:

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \\ = \ & (4x_4 + 6x_5 - 2, -3x_4 + 3, -x_4 - 2x_5 + 7, x_4, x_5) \\ = \ & (4x_4 + 6x_5, -3x_4, -x_4 - 2x_5, x_4, x_5) + (-2, 3, 7, 0, 0) \end{aligned}$$

Ratkaisujoukon esittäminen

Huomautus

"portaan aloittavat" muuttujat esitetään muiden avulla, muut jäävät esitykseen.

Esimerkki

$$\begin{cases} x_1 & & & -4x_4 & -6x_5 & = & -2 \\ & x_2 & & +3x_4 & & = & 3 \\ & & x_3 & +x_4 & +2x_5 & = & 7 \end{cases}$$

Ratkaisut:

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \\ = \; & (4x_4 + 6x_5 - 2, -3x_4 + 3, -x_4 - 2x_5 + 7, x_4, x_5) \\ = \; & (4x_4 + 6x_5, -3x_4, -x_4 - 2x_5, x_4, x_5) + (-2, 3, 7, 0, 0) \\ = \; & (4x_4, -3x_4, -x_4, x_4, 0) + (6x_5, 0, -2x_5, 0, x_5) + (-2, 3, 7, 0, 0) \end{aligned}$$

Ratkaisujoukon esittäminen

Huomautus

"portaan aloittavat" muuttujat esitetään muiden avulla, muut jäävät esitykseen.

Esimerkki

$$\begin{cases} x_1 & & & -4x_4 & -6x_5 & = & -2 \\ & x_2 & & +3x_4 & & = & 3 \\ & & x_3 & +x_4 & +2x_5 & = & 7 \end{cases}$$

Ratkaisut:

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \\ = \; & (4x_4 + 6x_5 - 2, -3x_4 + 3, -x_4 - 2x_5 + 7, x_4, x_5) \\ = \; & (4x_4 + 6x_5, -3x_4, -x_4 - 2x_5, x_4, x_5) + (-2, 3, 7, 0, 0) \\ = \; & (4x_4, -3x_4, -x_4, x_4, 0) + (6x_5, 0, -2x_5, 0, x_5) + (-2, 3, 7, 0, 0) \\ = \; & x_4(4, -3, -1, 1, 0) + x_5(6, 0, -2, 0, 1) + (-2, 3, 7, 0, 0), \end{aligned}$$

Ratkaisujoukon esittäminen

Lause

Jos A on lineaarisen yhtälöryhmän $m \times n$-matriisi (ei augmentoitu), ja sen porrasmuodossa on r porrasta (nollasta eroavaa riviä), voidaan ryhmän ratkaisut esittää muodossa $\boldsymbol{x} = x_{r+1}\boldsymbol{c}_{r+1} + \ldots + x_n\boldsymbol{c}_n + \boldsymbol{c}$, missä $\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ ovat vakiovektoreita ja $x_i \in \mathbb{R}$.

Ratkaisujoukon esittäminen

Määritelmä

Matriisista A saatavan (redusoidun) porrasmatriisin nollasta eroavien rivien lukumäärää sanotaan matriisin asteeksi (rank) ja merkitään $r(A)$.

Ratkaisujoukon esittäminen

Määritelmä

Matriisista A saatavan (redusoidun) porrasmatriisin nollasta eroavien rivien lukumäärää sanotaan matriisin asteeksi (rank) ja merkitään $r(A)$.

Lause

- $r(A)$ on matriisin rivien generoiman vektoriavaruuden dimensio.

Ratkaisujoukon esittäminen

Määritelmä

Matriisista A saatavan (redusoidun) porrasmatriisin nollasta eroavien rivien lukumäärää sanotaan matriisin asteeksi (rank) ja merkitään $r(A)$.

Lause

- $r(A)$ on matriisin rivien generoiman vektoriavaruuden dimensio.
- $r(A)$ on matriisin sarakkeiden generoiman vektoriavaruuden dimensio.

Esimerkki

Onko joukko
$B = \{(1,-1,2,-3),(-2,2,1,2),(-4,4,7,0),(-3,3,-1,5)\}$
lineaarisesti riippumaton ?

$$\begin{aligned} & c_1(1,-1,2,-3) + c_2(-2,2,1,2) \\ + \quad & c_3(-4,4,7,0) + c_4(-3,3,-1,5) = (0,0,0,0) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrcl} c_1 & -2c_2 & -4c_3 & -3c_4 & = & 0 \\ -c_1 & +2c_2 & +4c_3 & +3c_4 & = & 0 \\ 2c_1 & +c_2 & +7c_3 & -c_4 & = & 0 \\ -3c_1 & +2c_2 & & +5c_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Kerroinmatriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vastaa yhtälöryhmää

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} c_1 & & +2c_3 & -c_4 & = & 0 \\ & c_2 & +3c_3 & +c_4 & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Ratkaisujoukon esittäminen

Kerroinmatriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} c_1 \quad +2c_3 - c_4 = 0 \\ \quad c_2 + 3c_3 + c_4 = 0 \\ \qquad 0 = 0 \\ \qquad 0 = 0 \end{cases}.$$

Ratkaisut ovat

$$\begin{aligned} (c_1, c_2, c_3, c_4) &= (-2c_3 + c_4, -3c_3 - c_4, c_3, c_4) \\ &= c_3(-2, -3, 1, 0) + c_4(1, -1, 0, 1). \end{aligned}$$