Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

Kertausta

Lineaarikombinaatiot

$$L(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k) = \{c_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_k\boldsymbol{v}_k \mid c_i \in \mathbb{K}\}$$

(yleensä $\mathbb{K}$ on joko $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$).

Esimerkki

$$\begin{aligned} L((1,1,1),(-1,0,2)) &= \{r(1,1,1) + s(-1,0,2) \mid r,s \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(r-s, r, r+2s) \mid r,s \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Taso avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

Kertausta

Aliavaruus

Joukko $U \subseteq V$ on vektoriavaruuden V aliavaruus, jos $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$, $\alpha \in \mathbb{K}$ myös $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in U$ ja $\alpha \boldsymbol{x} \in U$.
Aliavaruus on "suljettu" vektoriyhteenlaskun ja skalaarimonikerran suhteen.

Lineaarinen riippuvuus

Vektorijoukko $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}}\}$ on lineaarisesti riippuva, jos jollekin vektorille $\boldsymbol{v}_i$

$$\boldsymbol{v}_i \in L(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_k).$$

Kriteeri: vektorijoukko $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}}\}$ on lineaarisesti riippumaton, jos yhtälöllä

$$c_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_k \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$

on vain ilmeinen (triviaali) ratkaisu $c_1 = \ldots = c_k = 0$.

Kertausta

Kanta

Vektorijoukko $B = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ on vektoriavaruuden V kanta, jos

$$V = L(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$$

ja B on lineaarisesti riippumaton.

Lause

Vektoriavaruuden kaikissa kannoissa on yhtä monta vektoria.

Määritelmä

Vektoriavaruuden V dimensio $\dim(V)$ on kanta-alkioiden lukumäärä.

Kertausta

Koordinaattivektori

Jos $B = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ on avaruuden V kanta, on jokaisella vektorilla $\boldsymbol{v} \in V$ yksikäsitteinen kantaesitys

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{b}_n.$$

Vektoria $\boldsymbol{v}_B = (c_1, \ldots, c_n)$ sanotaan vektorin $\boldsymbol{v}$ koordinaattivektoriksi kannan B suhteen.

Esimerkki

$B = \{\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}\} = \{(1,1), (1,-1)\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta. Vektorilla $\boldsymbol{v} = (1,1) \in \mathbb{R}^2$ on kantaesitys

$$(1,1) = 1 \cdot (1,1) + 0 \cdot (1,-1),$$

josta saadaan koordinaattivektori kannan B suhteen: $\boldsymbol{v}_B = (1,0)$.

Luonnollinen kanta

Vektoriavaruudella $\mathbb{K}^n$ on aina kanta $B = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, missä $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, ..., $\boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$.
Koska jokainen $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ voidaan esittää

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n,$$

on vektorin $\boldsymbol{x}$ koordinaattivektori kannan B suhteen $\boldsymbol{x}_B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, siis $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{x}$.
Kantaa B kutsutaan tämän vuoksi avaruuden $\mathbb{K}^n$ luonnolliseksi kannaksi.

Kertausta

Huomautus

Jos $U \leq V$ on aliavaruus, on aina mahdollista täydentää avaruuden U kanta avaruuden V kannaksi. Erityisesti $\dim(U) \leq \dim(V)$.

Esimerkki

Joukko $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ muodostaa kannan avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavarudelle. Jos tähän lisätään vielä esimerkiksi vektori $(0, 0, 1)$, saadaan kanta avaruudelle $\mathbb{R}^3$.

Gaussin-Jordanin menetelmä

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kertausta

Esitystapa

Tulkitaan matriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x & +2y & & = & 1 \\ & & z & = & -2 \\ & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

augmentoiduksi matriisiksi. Tällöin ratkaisut voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (-2y + 1, y, -2) = (-2y, y, 0) + (1, 0, -2) \\ &= y(-2, 1, 0) + (1, 0, -2), \end{aligned}$$

$y \in \mathbb{R}$.

Matriisit

Määritelmä

Olkoot U ja V vektoriavaruuksia yli kunnan $\mathbb{K}$. Funktio $f : U \to V$ on *lineaarinen*, jos

$$f(a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2) = a_1 f(\boldsymbol{u}_1) + a_2 f(\boldsymbol{u}_2).$$

Induktiolla:

$$f(a_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{u}_n) = a_1 f(\boldsymbol{u}_1) + \ldots + a_n f(\boldsymbol{u}_n)$$

Matriisit

Matriisiesitys

Valitaan avaruudelle U (dim. n) kanta $B = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ ja avaruudelle V (dim. m) kanta $C = \{\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_m\}$.
Tällöin vektorin $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n$ kuva saadaan muodossa

$$f(x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n) = x_1 f(\boldsymbol{b}_1) + \ldots + x_n f(\boldsymbol{b}_n)$$

Koska C on avaruuden V kanta, voidaan jokainen $f(\boldsymbol{b}_i)$ esittää muodossa

$$f(\boldsymbol{b}_i) = a_{1i}\boldsymbol{c}_1 + \ldots + a_{mi}\boldsymbol{c}_m$$

Matriisit

Matriisiesitys

$$f(x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n) = x_1 f(\boldsymbol{b}_1) + \ldots + x_n f(\boldsymbol{b}_n)$$

Koska C on avaruuden V kanta, voidaan jokainen $f(\boldsymbol{b}_i)$ esittää muodossa

$$f(\boldsymbol{b}_i) = a_{1i}\boldsymbol{c}_1 + \ldots + a_{mi}\boldsymbol{c}_m$$

Yhdistämällä:

$$\begin{aligned}
& x_1 f(\boldsymbol{b}_1) + \ldots + x_n f(\boldsymbol{b}_n) \\
= \quad & x_1(a_{11}\boldsymbol{c}_1 + \ldots + a_{m1}\boldsymbol{c}_m) \\
+ \quad & \ldots + x_n(a_{1n}\boldsymbol{c}_1 + \ldots + a_{mn}\boldsymbol{c}_m) \\
= \quad & (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)\boldsymbol{c}_1 \\
+ \quad & \ldots + (a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n)\boldsymbol{c}_m
\end{aligned}$$

Matriisit

Määritelmä

Jos $f : U \to V$ on lineaarikuvaus B ja C avaruuksien U ja V kannat, sekä

$$f(\boldsymbol{b}_i) = a_{1i}\boldsymbol{c}_1 + \ldots + a_{mi}\boldsymbol{c}_m,$$

sanotaan, että matriisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

on lineaarikuvauksen f *matriisi* kantojen B ja C suhteen.

Määritelmä

$m \times n$ matriisi on kaavio

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

jossa on m riviä ja n saraketta. Jos matriisin alkiot ovat reaalilukuja (kunnan $\mathbb{K}$), sanotaan että matriisi on yli reaalilukujen (yli kunnan $\mathbb{K}$)

Määritelmä

Rivivektori (vaakavektori) on $1 \times n$ matriisi $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$.
Sarakevektori (pystyvektori) on $m \times 1$ matriisi

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Matriisikertolasku

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\
\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n
\end{pmatrix}
$$

Huomautus

Olkoon A lineaarikuvauksen $f : U \to V$ matriisi kantojen B ja C suhteen. Jos $\boldsymbol{x}$ on alkukuvan koordinaattivektori, saadaan kuvan koordinaattivektori matriisikertolaskulla $A\boldsymbol{x}$. $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$?

Esimerkki

Matriisikertolasku

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + z - w \\ x + 3y + 2z + 2w \\ 2x - 2y + w \end{pmatrix}$$

Määrittelee lineaarikuvauksen $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, jossa koordinaattivektori $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ kuvautuu koordinaattivektoriksi $(2x + z - w, x + 3y23z + 2w, 2x - 2y + w) \in \mathbb{R}^3$.

Matriisitulo

Määritelmä

Olkoon A $m \times n$-matriisi ja B $n \times k$-matriisi. Matriisitulo AB voidaan määritellä seuraavasti: Esitetään B $n \times 1$ sarakkeina: $B = (\boldsymbol{b}_1 \ldots \boldsymbol{b}_k)$, jolloin

$$AB = (A\boldsymbol{b}_1 \ldots A\boldsymbol{b}_k).$$

Matriisitulo

Jos A on $m \times n$-matriisi ja B on $n \times k$-matriisi, on

$$(AB)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} A_{il} B_{lj}$$

Matriisitulo

Esimerkki

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{2\times 3}$$

ei ole määritelty

Esimerkki

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}_{3\times 2}$$

on määritelty.

Matriisitulo

Huomautus

Matriisitulo voidaan laskea lohkomuodossa

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B_1 + A_2 B_3 & A_1 B_2 + A_2 B_4 \\ A_3 B_1 + A_4 B_3 & A_3 B_2 + A_4 B_4 \end{pmatrix}$$

mikäli lohkojen tyypit sopivat yhteen.

Matriisit

Skalaarikertolasku

Jos A on $m \times n$-matriisi ja c joko kompleksi- tai reaaliluku, on cA $m \times n$-matriisi, jolle pätee $(cA)_{ij} = cA_{ij}$ (kertolasku alkioittain).

Matriisien yhteenlasku

Jos A on $m \times n$-matriisi ja B $r \times s$-matriisi, summa $A + B$ määritellään vain jos $m = r$ ja $n = s$. Tällöin

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

Huomautus

$m \times n$-matriisit muodostavat vektoriavaruuden yhteenlaskun ja skalaarikertolaskun suhteen.

Matriisit

Esimerkki

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ on 2×3-matriisi, $5A = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 15 \end{pmatrix}$

Esimerkki

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ on 2×3-matriisi ja $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 3×2-matriisi. Summaa $A + B$ ei ole määritelty.

Esimerkki

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ on 2×3-matriisi ja $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ on 2×3-matriisi.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriisit

Määritelmä

- *Nollamatriisi* O on matriisi, jonka kaikki alkiot ovat nollia
- *Neliömatriisi* on matriisi, jossa rivien määrä on sama kuin sarakkeiden määrä
- *Diagonaalimatriisi* on neliömatriisi D, jolle pätee $i \neq j \Rightarrow D_{ij} = 0$.
- *Identiteettimatriisi* I_n on diagonaalimatriisi, jonka kaikki *diagonaalialkiot* ovat ykkösiä.

Määritelmä

- *Transpoosi* $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.
- Neliömatriisi A on *symmetrinen*, jos $A^T = A$.
- Matriisin A:n *vastamatriisi* $-A$ määritellään asettamalla $(-A)_{ij} = -A_{ij}$.

Matriisitulo

Lause

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $a(AB) = (aA)B = A(aB)$
- $AO = OA = O$
- $AI = IA = A$,
- $(AB)^T = B^T A^T$,

edellyttäen että vasemmat puolet ovat määriteltyjä.

Matriisitulo

Määritelmä

Jos A on neliömatriisi ja $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, määritellään

$$\begin{cases} A^0 &= I \\ A^n &= A \cdot A \cdot \ldots \cdot A \quad (n \text{ kpl}). \end{cases}$$