Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

Matriisit

Määritelmä

Jos $f : U \to V$ on lineaarikuvaus B ja C avaruuksien U ja V kannat, sekä

$$f(\boldsymbol{b}_i) = a_{1i}\boldsymbol{c}_1 + \ldots + a_{mi}\boldsymbol{c}_m,$$

sanotaan, että matriisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

on lineaarikuvauksen f *matriisi* kantojen B ja C suhteen.

Matriisit

Matriisikertolasku

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Huomautus

Olkoon A lineaarikuvauksen $f : U \to V$ matriisi kantojen B ja C suhteen. Jos $\boldsymbol{x}$ on alkukuvan koordinaattivektori (sarakemuodossa), saadaan kuvan koordinaattivektori matriisikertolaskulla $A\boldsymbol{x}$.

Matriisitulo

Määritelmä

Olkoon A $m \times n$-matriisi ja B $n \times k$-matriisi. Matriisitulo AB voidaan määritellä seuraavasti: Esitetään B $n \times 1$ sarakkeina: $B = (\boldsymbol{b}_1 \dots \boldsymbol{b}_k)$, jolloin

$$AB = (A\boldsymbol{b}_1 \dots A\boldsymbol{b}_k).$$

Symmetrinen esitys

Jos A on $m \times n$-matriisi ja B on $n \times k$-matriisi, on

$$(AB)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} A_{il} B_{lj}$$

Matriisitulo

Lause

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $a(AB) = (aA)B = A(aB)$
- $AO = OA = O$
- $AI = IA = A$,
- $(AB)^T = B^T A^T$,

edellyttäen että vasemmat puolet ovat määriteltyjä.

Matriisitulo

Määritelmä

Jos A on neliömatriisi ja $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, määritellään

$$\begin{cases} A^0 & = & I \\ A^n & = & A \cdot A \cdot \ldots \cdot A \quad (n \text{ kpl}). \end{cases}$$

Määritelmä

jos $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n \in \mathbb{K}[x]$ ja A on neliömatriisi yli kunnan $\mathbb{K}$, on

$$p(A) = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \ldots + c_n A^n.$$

Yleistys: Jos $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \ldots$ on Maclaurinin sarja, on tietyin ehdoin

$$f(A) = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + c_3 A^3 + \ldots$$

Matriisitulo

Lineaarikuvausten yhdistäminen

Olkoot $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ja $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ lineaarikuvauksia, joiden matriisit ovat A_f ja A_g. Yhdistetty kuvaus $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ voidaan esittää muodossa ($\boldsymbol{x}$ on alkukuvan koordinaattivektori sarakemuodossa).

$$(g \circ f)(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x})) = A_g(A_f \boldsymbol{x}) = (A_g A_f)\boldsymbol{x}.$$

Täten

$$A_{g \circ f} = A_g A_f$$

Huomautus

Jos A on $m \times n$-matriisi, $\boldsymbol{x}$ n-pituinen sarakevektori ja $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ m-pituinen sarakevektori. Transponoimalla yhtälö $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ saadaan

$$\boldsymbol{y}^T = \boldsymbol{x}^T A^T.$$

Markovin ketjut

- Systeemin tilat $\{1, 2, \ldots, n\}$
- $p_i^{(t)} = \mathbb{P}(\text{Ajanhetkellä } t \text{ systeemi on tilassa } i)$
- $p_{ij} = \mathbb{P}(\text{Systeemi siirtyy tilaan } i \text{ kun se on tilassa } j)$
- $p_i^{(t+1)} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} p_j^{(t)}$

Matriisimuoto:

$$\begin{pmatrix} p_1^{(t+1)} \\ p_2^{(t+1)} \\ \vdots \\ p_n^{(t+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^{(t)} \\ p_2^{(t)} \\ \vdots \\ p_n^{(t)} \end{pmatrix}$$

Matriisitulo

Kannanvaihdon matriisi

Jos $\boldsymbol{v} \in V$ ja sekä B_1 että B_2 ovat avaruuden V kantoja, on vektorilla $\boldsymbol{v}$ olemassa koordinaattivektorit

$$\boldsymbol{v}_B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

ja

$$\boldsymbol{v}_C = (c_1, c_2, \ldots, c_b).$$

Voidaan todeta, että $\boldsymbol{v}_B \to \boldsymbol{v}_C$ on lineaarikuvaus. Ehdon $\boldsymbol{v}_C^T = M\boldsymbol{v}_B^T$ toteuttavaa matriisia kutsutaan *kannanvaihdon* $B \to C$ matriisiksi.

Kiertomatriisi $\mathbb{R}^2$:ssa

Kierretään koordinaatistoa kulman θ verran ja käytetään pisteen (x, y) uusista koordinaateista merkintää (x', y').
Alkeistrigonometrian perusteella

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases},$$

mikä voidaan matriisimuodossa kirjoittaa

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{\text{Merk.}}{=} R(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Erikoistapaus kannanvaihdon matriisista
- $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$.

Matriisitulo

Kiertomatriisit $\mathbb{R}^3$:ssa

Kierto z-akselin ympäri:

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' = z \end{cases}$$

voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_z(\theta)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Kiertomatriisit $\mathbb{R}^3$:ssa

Kierto x-akselin ympäri:

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= y\cos\theta - z\sin\theta \\ z' &= y\sin\theta + z\cos\theta \end{cases}$$

voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{R_x(\theta)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Kiertomatriisit $\mathbb{R}^3$:ssa

Kierto y-akselin ympäri:

$$\begin{cases} x' &= x\cos\theta - z\sin\theta \\ y' &= y \\ z' &= x\sin\theta + z\cos\theta \end{cases}$$

voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}}_{R_y(\theta)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Kaikki kierrot saadaan matriisien $R_x(\theta_1)$, $R_y(\theta_2)$ ja $R_z(\theta_3)$ tuloina.

Lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \vdots & & \ddots & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Kompaktimpi esitys: $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$?

Käänteismatriisi

Määritelmä

Olkoon A $n \times n$-matriisi. Jos on olemassa sellainen $n \times n$-matriisi B, että $AB = BA = I$, sanotaan, että B on A:n käänteismatriisi ja merkitään $B = A^{-1}$.
Jos A:lla on käänteismatriisi, sanotaan että A on säännöllinen.
Muutoin A on singulaarinen.

Huomautus

Voidaan todistaa:

- Neliömatriiseille $AB = I \Rightarrow BA = I$.
- $n \times n$ matriisi A on säännöllinen tarkalleen silloin kun $r(A) = n$.
- A on säännöllinen tarkalleen silloin kun A:n rivit ovat lineaarisesti riippumattomat.

Käänteismatriisi

Käänteismatriisin etsiminen

Merkitään $B = (\boldsymbol{b}_1 \dots \boldsymbol{b}_n)$ ja $I = (\boldsymbol{e}_1^T \dots \boldsymbol{e}_n^T)$, jolloin yhtälö $AB = I$ saa muodon

$$(A\boldsymbol{b}_1 \dots A\boldsymbol{b}_n) = (\boldsymbol{e}_1^T \dots \boldsymbol{e}_n^T).$$

Tällöin sarakkeet $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n$ voidaan löytää ratkaisemalla yhtälöryhmät $A\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1^T, \dots, A\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{e}_n^T$. Yhtälöryhmä $A\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{e}_i^T$ voidaan ratkaista redusoimalla augmentoitu matriisi redusoituun porrasmuotoon: $(A\,\boldsymbol{e}_i^T) \sim \dots \sim (I\,\boldsymbol{b}_i)$. Redusointi voidaan suorittaa yhtä aikaa kaikille sarakkeille $\boldsymbol{e}_1^T, \dots, \boldsymbol{e}_n^T$:

$$(A\,\boldsymbol{e}_1^T \dots \boldsymbol{e}_n^T) \sim \dots \sim (I\,\boldsymbol{b}_1 \dots \boldsymbol{b}_n) = (I\,A^{-1})$$

Käänteismatriisi

Gaussin-Jordanin menetelmä

$$(A \quad I) \sim \ldots \sim (I \quad A^{-1})$$

Huomautus

Jos Gaussin-Jordanin menetelmä ei muuta lohkomuodon $(A \quad I)$ vasemmanpuoleista matriisia A identiteettimatriisiksi, vaan siihen ilmaantuu nollarivi, voidaan todeta että A:lla ei ole käänteismatriisia.
Edellytys käänteismatriisin olemassaololle on siis se, että $r(A) = n$, toisin sanoen matriisin pitää olla täysiasteinen. Tämä puolestaan on yhtäpitävää sen kanssa, että matriisin rivit (ja sarakkeet) ovat lineaarisesti riippumattomat.

Multilineaarinen kuvaus

Määritelmä

Kuvaus $f : V \times \ldots \times V \to U$ on *multilineaarinen*, jos se on lineaarinen jokaisen muuttujan suhteen, siis

$$f(\ldots, a\boldsymbol{x}, \ldots) = af(\ldots, \boldsymbol{x}, \ldots)$$

ja

$$f(\ldots, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \ldots) = f(\ldots, \boldsymbol{x}, \ldots) + f(\ldots, \boldsymbol{y}, \ldots).$$

Huomautus

$$f(\ldots, \mathbf{0}, \ldots) = f(\ldots, \mathbf{0} + \mathbf{0}, \ldots) = f(\ldots, \mathbf{0}, \ldots) + f(\ldots, \mathbf{0}, \ldots),$$

joten $f(\ldots, \mathbf{0}, \ldots) = \mathbf{0}$.

Multilineaarinen kuvaus

Määritelmä

Multilineaarinen kuvaus on *alternoiva*, jos

$$f(\ldots,\boldsymbol{x},\ldots,\boldsymbol{y},\ldots) = -f(\ldots,\boldsymbol{y},\ldots,\boldsymbol{x},\ldots)$$

Seuraus

$$f(\ldots,\boldsymbol{x},\ldots,\boldsymbol{x},\ldots) = -f(\ldots,\boldsymbol{x},\ldots,\boldsymbol{x},\ldots),$$

joten $f(\ldots,\boldsymbol{x},\ldots,\boldsymbol{x},\ldots) = \mathbf{0}$.

Seuraus

$$\begin{aligned} & f(\ldots,\boldsymbol{x},\ldots,\boldsymbol{y}+a\boldsymbol{x},\ldots) \\ = \;& f(\ldots,\boldsymbol{x},\ldots,\boldsymbol{y},\ldots)+a\,\underbrace{f(\ldots,\boldsymbol{x},\ldots,\boldsymbol{x},\ldots)}_{\mathbf{0}} \\ = \;& f(\ldots,\boldsymbol{x},\ldots,\boldsymbol{y},\ldots) \end{aligned}$$

Multilineaarinen kuvaus

Lause

Multilineaarinen alternoiva kuvaus määräytyy yksikäsitteisesti arvosta $f(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$.

Todistus

Aiemmin havaitun perusteella

$$f(\ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots) = \mathbf{0},$$

joten riittää tarkastella vain arvoja

$$f(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n}),$$

jossa kaikki kantavektorit esiintyvät tasan kerran.

Multilineaarinen kuvaus

Todistus (jatkoa)

Koska vektoreiden paikan vaihto vaihtaa funktion f merkin, voidaan todeta, että

$$f(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n}) = \pm f(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n),$$

missä etumerkki riippuu siitä kuinka monta kahden vektorin paikanvaihtoa on tarvittu aikaansaamaan järjestys $(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n})$.

Multilineaarinen kuvaus

Esimerkki

$$f(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = -f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) = f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3).$$

$$f(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = -f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3).$$

$$f(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = -f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3).$$

Määritelmä

Permutaatio tarkoittaa jonon $(1, 2, \ldots, n)$ uudelleenjärjestystä $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$.
Permutaation merkki $\mathrm{sgn}(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ on $+1$, jos se on saatu jonosta $(1, 2, \ldots, n)$ parillisella määrällä kahden alkion vaihdolla. Merkki on -1, jos tarvittavien vaihtojen määrä on pariton. Vaihtoja kutsutaan *transpositioiksi*. Permutaatiota sanotaan *parilliseksi*, jos transpositioiden määrä on parillinen. Muutoin permutaatio on *pariton*. Permutaatioiden joukosta käytetään merkintää S_n

Multilineaarinen kuvaus

Esimerkki

Kahdella transpositiolla saadaan $(1,2,3) \to (2,1,3) \to (3,1,2)$. Näin ollen $\mathrm{sgn}(3,1,2) = +1$. Yhdellä transpositiolla saadaan $(1,2,3) \to (3,2,1)$, joten $\mathrm{sgn}(3,2,1) = -1$. Kahdella transpositiolla saadaan $(1,2,3) \to (3,2,1) \to (3,1,2)$, joten $\mathrm{sgn}(3,1,2) = +1$.

$$S_3 = \{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}.$$

Huomautus

$$|S_n| = n \cdot (n-1) \cdot \ldots 2 \cdot 1 = n!.$$

Kantavektorien permutaatio

$$f(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n}) = \mathrm{sgn}(i_1, \ldots, i_n) f(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n).$$

Multilineaarinen kuvaus

Todistus (jatkoa)

Esittämällä $\boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^{m} v_{ij}\boldsymbol{e}_j$ saadaan

$$
\begin{aligned}
& f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \\
= \; & f\Big(\sum_{j_1=1}^{m} v_{1j_1}\boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{m} v_{nj_n}\boldsymbol{e}_{j_n}\Big) \\
= \; & \sum_{j_1=1}^{m} \cdots \sum_{j_n=1}^{m} v_{1j_1} \cdot \ldots \cdot v_{nj_n} f(\boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_n}) \\
= \; & \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_n) \in S_n} \operatorname{sgn}(j_1, \ldots, j_n) v_{1j_1} \cdot \ldots \cdot v_{nj_n} f(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}).
\end{aligned}
$$

Determinantti

Määritelmä

Olkoon $\mathbb{K}$ skalaarikunta (yleensä joko $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$) ja $D : \mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ multilineaarinen, alternoiva kuvaus, jolle pätee

$$D(\boldsymbol{e}_1^T, \ldots, \boldsymbol{e}_n^T) = 1.$$

Neliömatriisin $A = (\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_n)$ ($\boldsymbol{a}_i$ sarakkeita) determinantti $\det(A)$ määritellään

$$\det(A) = D(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n).$$

Determinantista käytetään myös merkintää $|A|$. Tässä merkinnässä jätetään pois matriisin A vasen ja oikea kaarisulje.

Ominaisuuksia

- $D(\ldots, \mathbf{0}, \ldots) = 0$
- $D(\ldots, \boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{x}, \ldots) = 0$
- $D(\ldots, \boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{y}, \ldots) = -D(\ldots, \boldsymbol{y}, \ldots, \boldsymbol{x}, \ldots)$
- $D(\ldots, \boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{y} + a\boldsymbol{x}, \ldots) = D(\ldots, \boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{y}, \ldots)$

Determinantti

Summalauseke

Merkitään

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Tällöin

$$\det(A) = \sum_{(j_1,j_2,\dots,j_n)\in S_n} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) A_{1j_1} A_{2j_2} \dots A_{nj_n}.$$

Esimerkki

Permutaatioiden $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$ ja $(3,1,2)$ ja $(3,2,1)$ merkit ovat $+1$, -1, -1, $+1$, $+1$ ja -1. Täten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

koostuu tulojen $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$ ja $a_{13}a_{22}a_{31}$ summasta oikeilla merkeillä varustettuna. Täten kyseinen determinantti on

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$