Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

Multilineaarinen kuvaus

Määritelmä

Kuvaus $f : V \times \ldots \times V \to U$ on *multilineaarinen*, jos se on lineaarinen jokaisen muuttujan suhteen, siis

$$f(\ldots, a\boldsymbol{x}, \ldots) = af(\ldots, \boldsymbol{x}, \ldots)$$

ja

$$f(\ldots, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \ldots) = f(\ldots, \boldsymbol{x}, \ldots) + f(\ldots, \boldsymbol{y}, \ldots).$$

Huomautus

$$f(\ldots, \mathbf{0}, \ldots) = f(\ldots, \mathbf{0} + \mathbf{0}, \ldots) = f(\ldots, \mathbf{0}, \ldots) + f(\ldots, \mathbf{0}, \ldots),$$

joten $f(\ldots, \mathbf{0}, \ldots) = \mathbf{0}$.

Multilineaarinen kuvaus

Määritelmä

Multilineaarinen kuvaus on *alternoiva*, jos

$$f(\ldots, \boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{y}, \ldots) = -f(\ldots, \boldsymbol{y}, \ldots, \boldsymbol{x}, \ldots)$$

Seuraus

$$f(\ldots, \boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{x}, \ldots) = -f(\ldots, \boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{x}, \ldots),$$

joten $f(\ldots, \boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{x}, \ldots) = \mathbf{0}$.

Multilineaarinen kuvaus

Seuraus

$$
\begin{aligned}
& f(\ldots,\boldsymbol{x},\ldots,\boldsymbol{y}+a\boldsymbol{x},\ldots) \\
= \; & f(\ldots,\boldsymbol{x},\ldots,\boldsymbol{y},\ldots)+a\,\underbrace{f(\ldots,\boldsymbol{x},\ldots,\boldsymbol{x},\ldots)}_{\mathbf{0}} \\
= \; & f(\ldots,\boldsymbol{x},\ldots,\boldsymbol{y},\ldots)
\end{aligned}
$$

Multilineaarinen kuvaus

Lause

Multilineaarinen alternoiva kuvaus määräytyy yksikäsitteisesti arvosta $f(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$.

Todistus

Aiemmin havaitun perusteella

$$f(\ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots) = \mathbf{0},$$

joten riittää tarkastella vain arvoja

$$f(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n}),$$

jossa kaikki kantavektorit esiintyvät tasan kerran.

Multilineaarinen kuvaus

Todistus (jatkoa)

Koska vektoreiden paikan vaihto vaihtaa funktion f merkin, voidaan todeta, että

$$f(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n}) = \pm f(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n),$$

missä etumerkki riippuu siitä kuinka monta kahden vektorin paikanvaihtoa on tarvittu aikaansaamaan järjestys $(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n})$.

Multilineaarinen kuvaus

Esimerkki

$$f(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = -f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) = f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3).$$

$$f(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = -f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3).$$

$$f(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = -f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3).$$

Määritelmä

Permutaatio tarkoittaa jonon $(1, 2, \ldots, n)$ uudelleenjärjestystä $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$.
Permutaation merkki $\operatorname{sgn}(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ on $+1$, jos se on saatu jonosta $(1, 2, \ldots, n)$ parillisella määrällä kahden alkion vaihdolla. Merkki on -1, jos tarvittavien vaihtojen määrä on pariton. Vaihtoja kutsutaan *transpositioiksi*. Permutaatiota sanotaan *parilliseksi*, jos transpositioiden määrä on parillinen. Muutoin permutaatio on *pariton*. Permutaatioiden joukosta käytetään merkintää S_n

Multilineaarinen kuvaus

Esimerkki

Kahdella transpositiolla saadaan $(1,2,3) \to (2,1,3) \to (3,1,2)$. Näin ollen $\mathrm{sgn}(3,1,2) = +1$. Yhdellä transpositiolla saadaan $(1,2,3) \to (3,2,1)$, joten $\mathrm{sgn}(3,2,1) = -1$. Kahdella transpositiolla saadaan $(1,2,3) \to (3,2,1) \to (3,1,2)$, joten $\mathrm{sgn}(3,1,2) = +1$.

$$S_3 = \{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}.$$

Huomautus

$$|S_n| = n \cdot (n-1) \cdot \ldots 2 \cdot 1 = n!.$$

Kantavektorien permutaatio

$$f(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n}) = \mathrm{sgn}(i_1, \ldots, i_n) f(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n).$$

Multilineaarinen kuvaus

Todistus (jatkoa)

Esittämällä $\boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^{m} v_{ij}\boldsymbol{e}_j$ saadaan

$$\begin{aligned}
& f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \\
= \; & f\Big(\sum_{j_1=1}^{m} v_{1j_1}\boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{m} v_{nj_n}\boldsymbol{e}_{j_n}\Big) \\
= \; & \sum_{j_1=1}^{m} \ldots \sum_{j_n=1}^{m} v_{1j_1} \ldots \cdot v_{nj_n} f(\boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_n}) \\
= \; & \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_n) \in S_n} \operatorname{sgn}(j_1, \ldots, j_n) v_{1j_1} \ldots \cdot v_{nj_n} f(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}).
\end{aligned}$$

Determinantti

Määritelmä

Olkoon $\mathbb{K}$ skalaarikunta (yleensä joko $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$) ja $D : \mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ multilineaarinen, alternoiva kuvaus, jolle pätee

$$D(\boldsymbol{e}_1^T, \ldots, \boldsymbol{e}_n^T) = 1.$$

Neliömatriisin $A = (\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_n)$ ($\boldsymbol{a}_i$ sarakkeita) determinantti $\det(A)$ määritellään

$$\det(A) = D(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n).$$

Determinantista käytetään myös merkintää $|A|$. Tässä merkinnässä jätetään pois matriisin A vasen ja oikea kaarisulje.

Determinantti

Ominaisuuksia

- $D(\ldots, \mathbf{0}, \ldots) = 0$
- $D(\ldots, \boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{x}, \ldots) = 0$
- $D(\ldots, \boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{y}, \ldots) = -D(\ldots, \boldsymbol{y}, \ldots, \boldsymbol{x}, \ldots)$
- $D(\ldots, \boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{y} + a\boldsymbol{x}, \ldots) = D(\ldots, \boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{y}, \ldots)$

Determinantti

Summalauseke

Merkitään

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Tällöin

$$\det(A) = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n) \in S_n} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) A_{1j_1} A_{2j_2} \dots A_{nj_n}.$$

Esimerkki

Permutaatioiden $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$ ja $(3,1,2)$ ja $(3,2,1)$ merkit ovat $+1$, -1, -1, $+1$, $+1$ ja -1. Täten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

koostuu tulojen $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$ ja $a_{13}a_{22}a_{31}$ summasta oikeilla merkeillä varustettuna. Täten kyseinen determinantti on

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Seuraus

$$\det(A^T) = \sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in S_n} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \ldots, j_n) A_{j_1 1} A_{j_2 2} \ldots A_{j_n n}$$

$$= \sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in S_n} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \ldots, j_n) A_{1k_1} A_{2k_2} \ldots A_{nk_n} = \det(A)$$

Seuraus

Determinantin arvo ei muutu jos rivi lisätään toiseen vakiolla kerrottuna.

Seuraus

Jos Gaussin-Jordanin prosessi tuottaa matriisiin A nollarivin, on $\det(A) = 0$.

Determinantti

Geometrinen tulkinta

Kun $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ (sarakkeet), determinantin itseisarvo $|\det(A)|$ merkitsee vektoreiden $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ määrittämän särmiön tilavuutta

Multiplikatiivisuus

Jos A ja B ovat $n \times n$-matriiseja, on

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Johtuu multilineaarisen kuvauksen yksikäsitteisyydestä

Huomautus

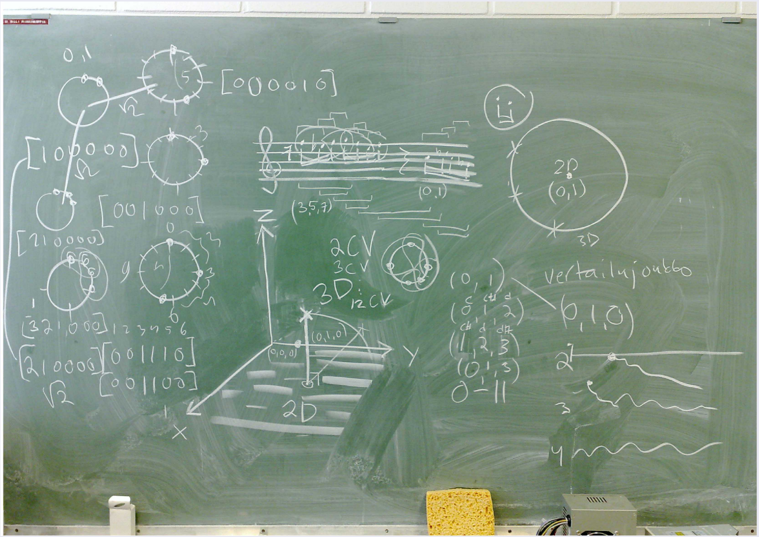
Jos A on säännöllinen, on $AA^{-1} = I$ ja siksi

$$\det(A)\det(A^{-1}) = 1.$$

Näin ollen $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

Determinantti

Comparison Structure Analysis



Määritelmä

Matriisin A *alimatriisi* määritellään pyyhkimällä jokin rivi ja sarake pois.

Esimerkki

Matriisista

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

saadaan toinen rivi ja kolmas sarake pyyhkimällä alimatriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Rivikehitelmät

Olkoon $A[i,j]$ alimatriisi joka saadaan pyyhimällä pois matriisin A rivi i ja sarake j ja $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A[i,j])$. Lukua C_{ij} kutsutaan alkion A_{ij} *komplementiksi*. Tällöin

$$A_{i1}C_{j1} + A_{i2}C_{j2} + \ldots + A_{in}C_{jn} = \begin{cases} \det(A), & \text{jos } i = j \\ 0, & \text{jos } i \neq j \end{cases}$$

Rivikehitelmien matriisimuoto

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{pmatrix} = \det(A)I$$

Determinantti

Rivikehitelmät

3-rivinen determinantti voidaan laskea seuraavasti:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Sääntö: Alkion a alideterminantti saadaan poistamalla rivi ja sarake, jolle a kuuluu. Merkkisääntö: vasen ylänurkka $+1$, sitten vuorotellen.

Determinantti

4-rivinen determinantti

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix}$$

$$+c \begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

Esimerkki

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} \\
= \ & 1 \cdot 10 - 3 \cdot 3 = 1.
\end{aligned}
$$

Determinantti

Lause

Homogeenisella yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} A_{11}x_1 & +A_{12}x_2 & +\dots & +A_{1n}x_n & = & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & = & 0 \\ A_{n1}x_1 & +A_{n2}x_2 & +\dots & +A_{nn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

on *epätriviaali* ratkaisu $((x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0))$ tarkalleen silloin kun kerroinmatriisin determinantti on $= 0$.

Jos $\det(A) \neq 0$, on A^{-1} olemassa ja tällöin $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Implikaation toinen suunta on hieman vaativampi.