Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

Yhteenveto

Merkitään $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ (sarake-esitys)

- $\det(\ldots, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \ldots) = \det(\ldots, \boldsymbol{a}, \ldots) + \det(\ldots, \boldsymbol{b}, \ldots)$
- $\det(\ldots, \alpha\boldsymbol{a}, \ldots) = \alpha \det(\ldots, \boldsymbol{a}, \ldots)$
- $\det(\ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots) = -\det(\ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots)$
- $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = 0$, jos jokin $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$
- $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = 0$ jos $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j$ joillekin $i \neq j$.
- $\det(\ldots \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j \ldots) = \det(\ldots \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j + \alpha\boldsymbol{a}_i \ldots)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- $\det(A) = \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_n) \in S_n} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \ldots, j_n) A_{1j_1} A_{2j_2} \ldots A_{nj_n}$
- $A_{i1}C_{j1} + A_{i2}C_{j2} + \ldots + A_{in}C_{jn} = \begin{cases} \det(A), & \text{jos } i = j \\ 0, & \text{jos } i \neq j \end{cases}$, missä $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A[i,j])$ on matriisialkion A_{ij} komplementti.

Determinantti

Yhteenveto

- $\det(A^T) = \det(A)$
- Sarakkeita koskevat ominaisuudet pätevät myös riveille.
- Jos $B \sim A$, niin $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(B) \neq 0$
- $\det(A) \neq 0$ tarkalleen silloin kun A:n sarakkeet (tai rivit) ovat lineaarisesti riippumattomat.
- $\det(A) \neq 0$ tarkalleen silloin kun A^{-1} on olemassa.
- $|\det(A)|$ on suuntaissärmiön $\{t_1\boldsymbol{a}_1 + t_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + t_n\boldsymbol{a}_n \mid 0 \leq t_i \leq 1\}$ tilavuus

Lause

Homogeenisella yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} A_{11}x_1 & +A_{12}x_2 & +\dots & +A_{1n}x_n & = & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & = & 0 \\ A_{n1}x_1 & +A_{n2}x_2 & +\dots & +A_{nn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

on *epätriviaali* ratkaisu $((x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0))$ tarkalleen silloin kun kerroinmatriisin determinantti on $= 0$.

Jos $\det(A) \neq 0$, on A^{-1} olemassa ja tällöin $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Implikaatio toiseen suuntaa on hieman vaativampi.

Ominaisarvot ja -vektorit

Matriisitulo

- $n \times n$-matriisien A ja B tulo on yleensä työläs laskea:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

- n^2 alkiota, n yhteenlaskua ja $n-1$ kertolaskua kutakin kohti $\Rightarrow O(n^3)$ operaatiota kun $n \to \infty$.
- $O(n^{2.37\cdots})$ operaatiota paras tunnettu menetelmä

Matriisitulo

- Diagonaalimatriiseille helppo:

$$
\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n b_n \end{pmatrix}
$$

Ominaisarvot ja -vektorit

Matriisitulo

- Markovin ketjut: $\boldsymbol{p}^{(t)} = M\boldsymbol{p}^{(t-1)}$.
- Yleistys: Diskreettiaikainen lineaarinen systeemi $\boldsymbol{x}^{(t)} = A\boldsymbol{x}^{(t-1)}$
- $\boldsymbol{x}^{(t)} = A\boldsymbol{x}^{(t-1)} = A \cdot A\boldsymbol{x}^{(t-2)} = A^2 \cdot A\boldsymbol{x}^{(t-3)} = \ldots$
- Seuraus: $\boldsymbol{x}^{(t)} = A^t\boldsymbol{x}^{(0)}$
- A^t voi olla työläs määrittää.

Määritelmä

Olkoon A neliömatriisi. $\lambda \in \mathbb{C}$ on matriisin A ominaisarvo, jos on olemassa $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ siten, että

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}.$$

Jokaista tämän yhtälön toteuttavaa vektoria $\boldsymbol{x}$ sanotaan ominaisarvoon λ kuuluvaksi ominaisvektoriksi.

Esimerkki

$$Ix = x = 1 \cdot x,$$

joten 1 on identiteettimatriisin ominaisarvo ja mikä hyvänsä x siihen liiittyvä ominaisvektori.

Esimerkki

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ominaisarvot ja -vektorit

Yleistys

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \cdots & 0 \\ \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = d_i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diagonaalimatriisin ominaisarvot ovat siis diagonaalialkiot ja ominaisvektoreina toimivat luonnollisen kannan vektorit.

Ominaisarvot ja -vektorit

Geometrinen tulkinta

- Jokainen $n \times n$-matriisi A määrittelee lineaarikuvauksen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$.
- Jokainen matriisin A ominaisvektori $\boldsymbol{x}$ vastaa sellaista suuntaa, jossa A toimii "venyttävänä" tai "kutistavana" kuvauksena: $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

Ominaisarvot ja -vektorit

Ominaisarvojen määrittäminen

Vaatimus: Yhtälöllä $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ oltava ratkaisu $\boldsymbol{x} \neq 0$.

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \lambda I \boldsymbol{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

Ominaisarvoyhtälö

Ratkaisu $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ on olemassa tarkalleen silloin kun

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Huomautus

Jos A on $n \times n$-matriisi, on $\det(A - \lambda I)$ astetta n oleva λ:n polynomi.

Esimerkki

Matriisin

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Ominaisarvot?

Esimerkki

Matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ominaisarvot?

Ominaisarvot ja -vektorit

Ominaisvektorien määrittäminen

Jos ominaisarvo λ on tunnettu, voidaan siihen kuuluvat ominaisvektorit $\boldsymbol{x}$ määrittää yhtälöstä

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

Gaussin-Jordanin menetelmällä.

Esimerkki

Aiempien esimerkkien matriisien ominaisvektorit?

Ominaisarvot ja -vektorit

Lause

Olkoon V $n \times n$-matriisin A ominaisarvoon λ liittyvien ominaisvektoreiden joukko. Tällöin V on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus.

Yhteenveto

Koska ominaisarvoyhtälö $\det(A - \lambda I) = 0$ on astetta n oleva polynomiyhtälö, voi erisuuria ominaisarvoja olla korkeintaan n kappaletta.
Kutakin ominaisarvoa λ kohti ominaisvektorit määräytyvät yhtälöstä $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, joka voidaan kirjoittaa homogeenisena $n \times n$-yhtälöryhmänä. Ominaisvektorit saadaan Gaussin-Jordanin menetelmällä ja ne muodostavat $\mathbb{R}^n$:n (tai $\mathbb{C}^n$:n) aliavaruuden.

Ominaisarvot ja -vektorit

Seuraus 1

Jos $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, on $A^i\boldsymbol{x} = \lambda^i\boldsymbol{x}$.

Seuraus 2

Olkoot $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ matriisin A ominaisarvoja ja $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ näihin kuuluvat ominaisvektorit.
Jos

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{x}_n,$$

on

$$A\boldsymbol{x} = a_1A\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_nA\boldsymbol{x}_n = a_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_n\lambda_n\boldsymbol{x}_n,$$

ja induktiolla

$$A^i\boldsymbol{x} = a_1\lambda_1^i\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_n\lambda_n^i\boldsymbol{x}_n.$$