# Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

## Koordinaattivektorin etsiminen

Jos $B_1 = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ on jokin kanta, on jokaiselle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ olemassa kantaesitys:

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n \boldsymbol{b}_n,$$

Koordinaattivektori $\boldsymbol{x}_B = (x_1, \ldots, x_n)$ voidaan löytää Gaussin-Jordanin prosessilla (Yleensä työläs prosessi)

## Koordinaattivektorin etsiminen, Ortonormaali kanta

Jos $B_1 = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ on ortonormaali kanta, voidaan kantaesitys

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n,$$

löytää helpommin. Koordinaattivektori $(x_1, \ldots, x_n)$ voidaan löytää laskemalla sisätulo $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_i)$, jolloin

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_i) &= x_1(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_i) + \ldots + x_i(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i) + \ldots + x_n(\boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{b}_i) \\ &= x_i(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i) = x_i||\boldsymbol{b}_i||^2,\end{aligned}$$

siis

$$x_i = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_i)}{||\boldsymbol{b}_i||^2}$$

### Määritelmä

Olkoot $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita. Tällöin *vektorin* $\boldsymbol{x}$ *projektio vektorilla* $\boldsymbol{y}$ tarkoittaa sitä origon ja pisteen $\boldsymbol{y}$ kautta kulkevan suoran $L(\boldsymbol{y})$ pistettä $\boldsymbol{x}'$, jolle $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$ on kohtisuorassa vektoria $\boldsymbol{y}$ vastaan.

### Gramin-Schmidtin ortogonalisointiprosessi

Lause: Jos $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ on lineaarisesti riippumaton joukko ja $(\cdot, \cdot)$ jokin sisätulo, on olemassa ortogonaali joukko $\{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_k\}$, jolle $L(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_k) = L(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$

**Määritelmä**

Lineaarikuvaus $f : V \to V$ säilyttää etäisyyden, jos $d(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ aina, kun $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in V$. Kuvaus $f$ säilyttää normin, jos $||f(\boldsymbol{x})|| = ||\boldsymbol{x}||$. Kuvaus $f$ säilyttää sisätulon, jos $(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

**Lause**

Olkoon etäisyys normin ja tämä puolestaan sisätulon indusoima. Jos lineaarikuvaus $f : V \to V$ säilyttää sisätulon, säilyttää se myös normin ja etäisyyden.

# Etäisyyden säilyttävät kuvaukset

## Määritelmä

Matriisi $A$ on ortogonaali, jos $A^T = A^{-1}$, siis $A^T A = AA^T = I$.

## Lause

Jos lineaarikuvauksen $f : V \to V$ matriisi $A_f$ on ortogonaali, niin kuvaus $f$ säilyttää pistetulon (ja siis myös tämän indusoiman normin ja etäisyyden)

## Määritelmä

Matriisin $A$ *adjugaatti* määritellään $A^* = \overline{A}^T$. Matriisi $A$ on *unitaarinen*, jos $A^* = A^{-1}$, siis $A^* A = AA^* = I$.

## Lause

Jos lineaarikuvauksen $f : V \to V$ matriisi $A_f$ on unitaarinen, niin $f$ säilyttää Hermiten pistetulon (ja siis myös sen indusoiman normin ja etäisyyden)

# Vektoriavaruuksien geometriaa

## Kulma avaruudessa $\mathbb{R}^n$

Vektoreiden $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ välinen *kulma* tarkoittaa kulmaa $\theta \in [0, \pi]$, joka muodostuu origosta (pisteestä $\mathbf{0}$) pisteeseen $\boldsymbol{x}$ ja origosta pisteeseen $\boldsymbol{y}$ kulkevien janojen välille.
Huomaa, että kolme pistettä $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ ja $\mathbf{0}$ kuuluvat aina samalle tasolle, joten vektoreiden välinen kulma on aina *tason* ominaisuus.

## Määritelmä

Jos $\theta$ on vektoreiden $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ välinen kulma, niin

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = ||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}|| \cos\theta.$$

## Huomautus

Jos kumpikaan $\boldsymbol{x}$ tai $\boldsymbol{y}$ ei ole nollavektori, on

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{||\boldsymbol{x}||||\boldsymbol{y}||}$$

# Vektoriavaruuksien geometriaa

## Yleistys

Nollasta poikkeavien vektoreiden $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ välinen kulma $\theta$ määritellään

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}||\,||\boldsymbol{y}||}.$$

Nollavektorin välinen kulma toiseen vektoriin määritellään aina suoraksi kulmaksi.

## Huomautus

Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön perusteella

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2 \leq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = ||\boldsymbol{x}||^2 \cdot ||\boldsymbol{y}||^2,$$

joten

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq ||\boldsymbol{x}||\,||\boldsymbol{y}||$$

# Korrelaatiokerroin

## Ongelmanasettelu

- Kaksi satunnaismuuttujaa $X$ ja $Y$.
- Näiden havainnot $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ja $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ tapauksissa 1, 2, ..., $n$.
- Selvitettävä, kuinka yleisesti $y_i \approx c \cdot x_i + b$.

## Muuttujien siirto

- Merkitään $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$
- $\mu_{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ ja $\mu_{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$
- Määritellään $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \mu_{\boldsymbol{x}} \mathbf{1}$ ja $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} - \mu_{\boldsymbol{y}} \mathbf{1}$.
- Tällöin $\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{y} + b\mathbf{1} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}' = c\boldsymbol{y}'$.
- Lisäksi vektoreiden $\boldsymbol{x}'$ ja $\boldsymbol{y}'$ koordinaattien summa on 0

# Korrelaatiokerroin

## Riippuvuus

- Yhdensuuntaisuus $\boldsymbol{x}' = c\boldsymbol{y}'$ merkitsee täydellistä (lineaarista) riippuvuutta.
- Vektoreiden $\boldsymbol{x}'$ ja $\boldsymbol{y}'$ kohtisuoruus merkitsee täydellistä (lineaarista) riippumattomuutta.
- Riippuvuuden määrää on siksi luonteva mitata vektoreiden $\boldsymbol{x}'$ ja $\boldsymbol{y}'$ välisellä kulmalla (tai sen kosinilla)
- $$\mathrm{Corr}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{y}'}{||\boldsymbol{x}'||||\boldsymbol{y}'||}$$

## Huomautus

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{y}' &= (\boldsymbol{x} - \mu_{\boldsymbol{x}}\mathbf{1}) \cdot (\boldsymbol{y} - \mu_{\boldsymbol{y}}\mathbf{1}) \\
&= \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} - \mu_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{x} \cdot \mathbf{1} - \mu_{\boldsymbol{x}}\mathbf{1} \cdot \boldsymbol{y} + \mu_{\boldsymbol{x}}\mu_{\boldsymbol{y}}\mathbf{1} \cdot \mathbf{1} \\
&= \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} - n\mu_{\boldsymbol{y}}\mu_{\boldsymbol{x}} - n\mu_{\boldsymbol{x}}\mu_{\boldsymbol{y}} + n\mu_{\boldsymbol{x}}\mu_{\boldsymbol{y}} \\
&= \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} - n\mu_{\boldsymbol{x}}\mu_{\boldsymbol{y}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i.
\end{aligned}$$