

Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot 2022

Demonstraatio 1, 5.9.2023

Huom: Vastaukset pitää perustella ilman matematiikkaohjelmia.

1. Ilmaise logiikan väittämä

$$(\forall x)(\exists y)(x = 2y)$$

sanallisesti. Onko tulkintajoukkoja joissa väittämä on tosi? Entä sellaisia joissa väittämä on epätosi? Esitä esimerkit.

2. Ilmaise logiikan väittämä

$$(\exists x)(\forall y)(x \geq y)$$

sanallisesti. Onko tulkintajoukkoja joissa väittämä on tosi? Entä sellaisia joissa väittämä on epätosi? Esitä esimerkit.

3. Esitä joukko $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9 \vee x^2 = 6 \vee 2x = 8\}$ luettelemalla sen alkiot.

4. Esitä joukko $\{x \in \mathbb{Z} \mid -10 \leq x \leq 10 \wedge (\exists y \in \mathbb{Z})(x = 3y)\}$ luettelemalla sen alkiot.

5. Kirjoita summa

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{4096}$$

käyttämällä \sum -merkintää.

6. Kirjoita tulo

$$\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7}\right) \cdot \left(\frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{40}{39} \cdot \frac{40}{41}\right)$$

Käyttämällä \prod -merkintää.

7. Osoita että

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Vihje: Käytä Newtonin binomikaavaa sopivilla arvoilla tai etsi perustelu siitä miten binomikaava luennolla johdettiin.

8. a) Mikä on termin x^{23} kerroin, kun lauseke

$$\left(x^5 - \frac{1}{x^2}\right)^{20}$$

kirjoitetaan auki Newtonin binomikaavaa käyttäen? Vihje: kts. luento-esimerkki.

- b) Mikä on termin x^{20} kerroin samassa lausekkeessa?

9. Osoita, että luennolla esitetystä reaalityyppisten lukujen aksiomatisoinnista seuraa, että reaalityyppisen luvun a vastaluku saadaan kertomalla luku a luvun 1 vastaluvulla, toisin sanoen, että $-a = (-1)a$. Vihje: Käytä aksioomia ja luennolla esitettyä tulosta $(\forall a)(0 \cdot a = 0)$ todetaksesi, että $a + (-1)a = 0$ ja vetoa vastaluvun yksikäsitteisyyteen.