

# Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot 2023

## Demonstraatio 2, 12.9.2023

1. Miten reaalityöiden kunta-aksioomista seuraa että  $(-1)(-1) = 1$ ? Vihje: Yhteensuhteellisuudella on mahdollista osoittaa, että  $(-1)(-1)$  on luvun  $-1$  vastaluku. Tämän jälkeen voi vedota vastaluvun yksikäsitteisyyteen.
2. Miten aiemman tehtävän tuloksesta seuraa se, että  $1 \in \mathbb{R}_+$ ? Vihje: Tee vastaoletus jonka mukaan  $1 \notin \mathbb{R}_+$  ja johda tästä ristiriita.
3. Miten edellisen tehtävän tuloksesta seuraa se, että  $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq 0)$ . Vihje: Käsittele erikseen tapaukset  $x = 0$ ,  $x > 0$  ja  $x < 0$ . Viimeisessä tapauksessa voi vedota edellisen demokerran tehtävään, jonka mukaan  $-x = (-1)x$ .
4. Kun  $n \in \mathbb{N}$ , määritellään lukujono  $r_n = \frac{n-1}{n}$ . Miksi  $(\forall n)(r_n < 1)$ ? Osoita, että jos  $\epsilon > 0$ , on olemassa sellainen  $n$ , että  $r_n > 1 - \epsilon$ . Olkoon  $A = \{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Mikä on siis  $\sup A$ ?  
Vihje: Ratkaise epäyhtälö  $r_n > 1 - \epsilon$  löytääksesi vaaditun luvun  $n$ . Ratkaisu voi olla helpompi kun kirjoittaa  $r_n = 1 - \frac{1}{n}$ .
5. Olkoon funktio  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  määritelty lausekkeella  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ . Esitä jotkut sellaiset joukot  $A$  ja  $B$ , että samalla lausekkeella määritellystä funktiosta  $f : A \rightarrow B$  tulee bijektio. Vihje: Luento-esimerkki funktiosta  $f(x) = x^2$  erilaisilla määrittely- ja maalijoukoilla.
6. Käytä logaritmeja selvittääksesi kumpi luvuista,  $2^{200}$  vai  $3^{128}$  on suurempi.
7. Määritä kaikki yhtälön  $\sin x = \cos x$  ratkaisut. Vihje 1: kosini tarkoittaa komplementtikulman siniä ja sitten voi miettiä millä kulmilla sini saa saman arvon. Vihje 2: On mahdollista käyttää myös Pythagoraan lausetta.
8. Tiedetään, että  $\alpha \in [0, \pi]$  ja että  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ . Mikä on  $\sin \alpha$ :n tarkka arvo? Entä kulman  $\alpha$  likiarvo? Ohje: Käytä aluksi Pythagoraan lausetta.
9. Käytä taulukkokirjasta tai Wikipediasta löytyviä trigonometrisia kaavoja ja sievennä

$$\sqrt{(\cos 2x - 1)^2 + (\sin 2x)^2}$$

niin yksinkertaiseksi kuin mahdollista. Tavoite:  $2|\sin x|$ .