Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot 2023

Demonstraatio 3, 19.9.2023

1. Sievennä $(3+2i)(5-4i)$, $(2-3i)\overline{(3-2i)}$ ja $\mathrm{Re}(\frac{1+2i}{3-4i})$.

   Mallivastaus:

$$(3+2i)(5-4i) = 15 - 12i + 10i - 8i^2 = 23 - 2i$$

$$(2-3i)\overline{(3-2i)} = (2-3i)(3+2i) = 6 + 4i - 9i - 6i^2 = 12 - 5i$$

   ,

$$\frac{1+2i}{3-4i} = \frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i+6i+8i^2}{3^2+4^2} = \frac{-5+10i}{25} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i,$$

   joten $\mathrm{Re}(\frac{1+2i}{3-4i}) = -\frac{1}{5}$.

2. Määritä $\sqrt{-4}$. Vihje: $-4 = 4i^2 = (2i)^2$. Kuinka monta arvoa neliöjuurella $\sqrt{-4}$ voisi olla?

   Mallivastaus: $\sqrt{-4}$ pitäisi olla yhtälön $z^2 = -4 \Leftrightarrow z^2 + 4 = 0$ ratkaisu. Koska $z^2 + 4 = z^2 - (2i)^2 = (z-2i)(z+2i)$, on tulon nollasäännön perusteella (miksi se toimii myös kompleksiluvuilla?) joko $z = 2i$ tai $z = -2i$.

   Mallivastaus 2:

$$\sqrt{-4} = (-4)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}(-4)}.$$

   Nyt $\mathrm{Log}(-4) = \log 4e^{i(\pi + 2\pi\cdot n)} = \ln 4 + i(\pi + 2\pi \cdot n)$ ja

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}(-4) = \frac{1}{2}\ln 2^2 + i(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot n),$$

   josta

$$(-4)^{\frac{1}{2}} = e^{\ln 2} e^{i(\frac{\pi}{2} + \pi\cdot n)} = 2e^{i(\frac{\pi}{2}+\pi\cdot n)}.$$

   Koska lisäys $\pi\cdot n$ on puoliympyrän suuruinen, on näitä arvoja vain kaksi, $2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$ ja $2e^{i(\frac{\pi}{2}+\pi)} = -2i$ (mieti mistä viimeisimmät yhtäsuuruudet johtuvat).

3. Etsi kaikki yhtälön $z^2 - 6z + 13 = 0$ ratkaisut. Vihje: Käytä toisen asteen polynomiyhtälön tavallista ratkaisua sekä edellisen tehtävän havaintoa negatiivisen luvun neliöjuuren määrittämiselle. Tarkista myös että saamasi ratkaisut toteuttavat yhtälön.

   Mallivastaus:

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot 1 \cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i.$$

4. Etsi napakoordinaattiesitys luvulle $-\sqrt{3} + i$.

   Mallivastaus: $\left|-\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$. Vaihekulma θ toteuttaa yhtälön $\tan\theta = \frac{1}{-\sqrt{3}}$ ja $\arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{\pi}{6}$. Koska kuitenkin $-\sqrt{3}+i$ sijaitsee kompleksitason vasemmalla puolella, pitää vaihekulmaksi valita $-\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$. Täten

$$-\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

   Vaihekulmaan voidaan lisätä mikä tahansa täyden ympyrän monikerta.

5. Määritä kaikki kompleksisen logaritmin $\mathrm{Log}(-\sqrt{3}+i)$ arvot.

   Mallivastaus: Edellisen tehtävän perusteella

$$-\sqrt{3}+i = 2e^{i(\frac{5\pi}{6}+2\pi n)},$$

   josta

$$\mathrm{Log}(-\sqrt{3}+i) = \ln 2 + i(\frac{5\pi}{6}+2\pi n), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

6. Määritä potenssin $i^{\frac{1}{2}}$ kaikki arvot.

   Mallivastaus: Luennolla esitetyn mukaan

$$\mathrm{Log}\, i = i(\frac{\pi}{2}+2\pi n),$$

   josta

$$\frac{1}{2}\mathrm{Log}\, i = i(\frac{\pi}{4}+\pi n)$$

   ja edelleen

$$i^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}\, i} = e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi n)} = e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\pi n}.$$

   Koska $n \in \mathbb{Z}$, voi tekijä $e^{i\pi n}$ saada vain arvoja ± 1, ja siis kysytyt arvot ovat $\pm e^{i\frac{\pi}{4}}$. Eulerin kaavan perusteella nämä voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$\pm e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}).$$

7. Laske kertolasku $(z-1)(z^2+z+1)$ ja etsi tulon nollasäännön perusteella kaikki yhtälön $z^3-1=0$ ratkaisut. Esitä ne muodossa $a+bi$.

   Mallivastaus: $(z-1)(z^2+z+1) = z^3-1$. Tällöin

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow z^3-1=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0,$$

   mikä toteutuu tulon nollasäännön perusteella tarkalleen silloin kun $z-1=0 \Leftrightarrow z=1$ tai kun $z^2+z+1=0$. Viimeisimmän yhtälön ratkaisut ovat

$$z = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

8. Etsi kaikki yhtälön $z^3+3z^2+3z-7=0$ kaikki ratkaisut. Ohje: Käytä binomikaavaa, merkitse $w=z+1$ ja ratkaise ensin w.

   Mallivastaus:

$$z^3+3z^2+3z-7 = z^3+3z^2+3x+1-8 = (z+1)^3-8 = w^3-8,$$

   jolloin ratkaistavaksi jää yhtälö $w^3-8=0$, jonka ratkaisut on esitetty luennolla, $w = 2e^{\frac{2\pi}{3}\cdot n}$, missä $n \in \{0,1,2\}$. Näin ollen

$$z = w-1 = 2e^{\frac{2\pi}{3}\cdot n}-1,$$

   ja ratkaisut voidaan Eulerin kaavan tai edellisen tehtävän avulla esittää muodossa

$$2-1=1, \quad 2(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})-1 = -2+i\sqrt{3}, \text{ ja } 2(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})-1 = -2-i\sqrt{3}.$$

9. Mikä on vialla seuraavassa päättelyssä:

$$-1 = i^2 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1?$$

Mallivastaus: Ensimmäinen yhtäsuuruus on oikein, samoin toinen vaikka merkintä $\sqrt{-1}$ ei olekaan yksikäsitteinen, se voi tarkoittaa joko kompleksilukua i tai $-i$. Myös toiseksi viimeisin yhtäsuuruus on kunnossa, joten ongelman täytyy sijaita joko kolmannessa, neljännessä tai viimeisessä yhtäsuuruudessa (tai joissain niistä). Tarkempi tarkastelu osoittaa (sivuutetaan tässä) että neljäs yhtäsuuruus on kunnossa.

Sen sijaan yksi ongelma on kolmannen yhtäsuuruuden kohdalla, sillä merkintä $\sqrt{-1}$ ei sen oikealla puolella ole yksikäsitteinen, toinen näistä voi yhtä hyvin tarkoittaa kompleksilukua i ja toinen sen vastalukua $-i$. Toinen ongelma on viimeisen yhtäsuuruuden kohdalla: Silloin kun $\sqrt{1}$ käsitetään kompleksiluvun neliöjuurena, ovat sekä 1 että -1 mahdollisia arvoja.

Päättelyvirhe johtuu siis siitä, että yhtäsuuruuksien ketjussa on yritetty käsitellä neliöjuurta myös kompleksilukujen joukossa funktiona. Neliöjuurta ei kompleksilukujen joukossa kuitenkaan voida perustellusti määritellä funktiona, vaan tällöin kyseessä on matematiikan termein *relaationa* tunnettu käsite, jossa toisin kuin funktiolla, yhdellä alkukuvalla voi olla monia kuvia.