

Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

Kurssin nettisivu

Perehdy nettisivun informaatioon:

<https://users.utu.fi/mikhirve/ins2324//Perustiedot/>

Luennot ja demot

Luennot ke 12-14 ja to 10-12 etäyhteydellä. Demoajankohdat ti 8-10, 10-12, 12-14, 14-16 tai 16-18. Vain 6 ryhmää toteutetaan. Suoritustavoista ja poikkeuksista kerrotaan kurssin nettisivulla.

Kurssin suoritus

Demotehtävistä suoritettava vähintään 40% ja läpäistävä lopputentti. Suoritus on myös mahdollista harjoituksia tekemällä

Tenttipäivät

Ilmoitetaan myöhemmin

Tavoitteet

Kurssilla esitetään matematiikan peruskäsitteitä: Looginen päättely, Reaaliluvut, elementaariset reaalifunktiot, ja kompleksiluvut. Nämä luovat pohjaa seuraavia insinöörimatematiikan kursseja varten.

Sisältö

Matematiikan merkintöjä, päättely, tavallisimmat reaalifunktiot, kompleksiluvut.

Luonnehdinta

Matematiikka on rakennetta, järjestystä ja suhteita käsittelevä tiede.

Matematiikan historiaa

- Laskutaito n. 35000 vuotta sitten.
- Abstrakti matematiikka n. 4000 vuotta sitten (Egypti).
- Kreikkalainen kukoistuskausi n. 300–100 eaa.
- Uuden ajan matematiikka 1600-luku → nykypäivä.

- Matematiikka ei ole luonnontiede
- Ei operationaalista kytkentää reaaliin maailmaan
- Onko

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

"totta"?

- Kaikki matemaattiset teoriat voidaan esittää *aksiomaattis-deduktiivisessa* muodossa.
- Teorian peruskäsitteet ja -oliot esitetään määritelminä ja niiden väliset suhteet tai *aksiomina*.
- Kaikki muut teorian väittämät (lauseet, teoreemat) johdetaan aksiomista loogisesti.
- Matemaattinen teoria: Niiden lauseiden joukko, jotka voidaan johtaa aksiomista.

Vaatimuksia aksiomatiikalle

- Peruskäsitteiden ja aksiomien pitäisi olla yksinkertaisia
- Aksiomia pitäisi olla vähän
- Aksiomien pitäisi olla ristiriidattomia

Peanon aksiomatisointi luonnollisille luvuille

Peruskäsitteet: Joukko \mathbb{N} , luku $1 \in \mathbb{N}$ ja luvun n seuraaja $s(n)$.

Aksioomat:

- 1 Jos $n \neq m$, niin $s(n) \neq s(m)$ (kahdella eri luonnollisella luvulla on eri seuraaja).
- 2 Kaikille joukon \mathbb{N} alkioille n pätee $s(n) \neq 1$ (ykkönen ei ole minkään luonnollisen luvun seuraaja).
- 3 Jos joukko A sisältää luvun 1 ja jokaisen sisältämänsä luvun seuraajan, niin silloin A sisältää kaikki luonnolliset luvut (*induktioaksioma*).

Päättelyn muotoja

- Deduktiivinen
 - Induktiivinen
 - Abduktiivinen
-
- Matematiikka rakennetaan yksinomaan deduktiivisen päättelyn turvin
 - Luonnontieteissä induktiivinen päättely on tyypillistä

Deduktiivinen päättely

- Äärellinen määrä päättelysääntöjä
- Oletusten ollessa tosia ovat johtopäätökset tosia
- "Loogisesti sitova"

Modus ponens

$$\frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi}$$

Syllogistinen logiikka



Aristoteles (384–322 eaa)

Syllogistinen logiikka

Premisseistä päätellään johtopäätös. Premissejä voi olla kaksi: Pääpremissi ja alipremissi

Esimerkki

$$\frac{\text{Sokrates on ihminen}}{\text{Sokrates on kuolevainen}}$$

Huomautus

Johtopäätös ei seuraa premissistä!

Esimerkki

Jokainen ihminen on kuolevainen
(pääpremissi)

Sokrates on ihminen
(alipremissi)

Sokrates on kuolevainen
(johtopäätös)

Huomautus

Johtopäätös seuraa premiseistä.

Kreikkalaiset aakkoset

alfa	A	α	ioota	I	ι	rhoo	P	ρ
beta	B	β	kappa	K	κ, \varkappa	sigma	Σ	σ, ς
gamma	Γ	γ	lambda	Λ	λ	tau	T	τ
delta	Δ	δ	myy	M	μ	ypsilon	Υ	υ
epsilon	E	ϵ	nyy	N	ν	fii	Φ	ϕ, φ
zeeta	Z	ζ	ksii	Ξ	ξ	khii	X	χ
eeta	H	η	omikron	O	o	psii	Ψ	ψ
theeta	Θ	θ, ϑ	pii	Π	π, ϖ	oomega	Ω	ω

- \wedge (konjunktio eli looginen ja)
- \vee (disjunktio eli looginen tai)
- \neg (negaatio eli looginen ei)
- \rightarrow (implikaatio eli looginen seuraus)
- \forall (universaalikvanttori)
- \exists (eksistentiaaliquanttori)

Esimerkki

- Logiikan kaava $(x \geq 1) \wedge (y < 0)$ väittää, että $x \geq 1$ ja $y < 0$.
- Kaava $(\forall x)(x^2 \geq 0)$ väittää, että jokainen x toteuttaa ehdon $x^2 \geq 0$.
- Kaava $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ väittää, että on olemassa sellainen x , että kaikille y :ille $y \leq x$
- Kaava $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - 3| < \delta \rightarrow |x^2 - 9| < \epsilon)$ väittää, että jokaista positiivilukua ϵ kohti on olemassa sellainen positiiviluku δ , että ehdosta $|x - 3| < \delta$ seuraa $|x^2 - 9| < \epsilon$.

Joukko

Joukko koostuu mistä hyvänsä olioista, mutta on voitava tarkoin määritellä ainakin periaatteessa, kuuluuko jokin olio joukkoon vai ei. Olioita, joista joukko koostuu, kutsutaan alkioiksi.

Merkintöjä

- $A = \{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{1, 2, 2, 3\}$
- \in on ns. *kaksipaikkainen relaatiosymboli* ja merkintä $x \in A$ tulkitaan siten, että alkio x kuuluu joukkoon A
- $x \notin A$ tarkoittaa $\neg(x \in A)$
- Merkintä $\{x \in A \mid \phi(x)\}$ tarkoittaa joukkoa, joka sisältää sellaiset joukon A alkiot x , jotka toteuttavat pystyviivan oikealla puolella olevan kaavan $\phi(x)$

Esimerkki

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10 \wedge x \text{ pariton}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Määritelmä

- $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ (yhtäsuuruus)
- $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$ (osajoukko)
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ (yhdiste eli unioni)
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ (leikkaus eli intersektio)
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ (erotus eli differenssi)
- $A = \emptyset \Leftrightarrow (\forall x)(x \notin A)$ (tyhjä joukko)