Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

Reaalilukujen ominaisuuksia

- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Onko yhtälöllä $x^2 = -1$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Mistä johtuu eroavaisuus vastauksissa?
- Mitä tarkalleen ottaen ovat reaaliluvut?
- Miksi $\sqrt{2}$ on olemassa joukossa $\mathbb{R}$?
- Miksi yhtälön $x^2 = -1$ ratkaisua ei ole joukossa $\mathbb{R}$?

Reaalilukujen aksiomatisointi

Peruskäsitteet: joukko $\mathbb{R}$, operaatiot $+$ ja $\cdot$, alkiot 0 ja $1 \in \mathbb{R}$.
Kunta-aksioomat:

1. Kaikille reaaliluvuille a, b ja c pätee $a + (b + c) = (a + b) + c$ ja $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
2. Jokaiselle reaaliluvulle a pätee $0 + a = a$ ja $1 \cdot a = a$.
3. Jokaista reaalilukua a kohti on olemassa a:n *vastaluku* $-a$, joka toteuttaa $a + (-a) = 0$ ja jokaista nollasta eroavaa reaalilukua a kohti on olemassa käänteisluku a^{-1}, joka toteuttaa $a \cdot a^{-1} = 1$.
4. Kaikille reaaliluvuille a ja b pätee $a + b = b + a$ ja $a \cdot b = b \cdot a$.
5. kaikille reaaliluvuille a, b, ja c pätee $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Reaalilukujen ominaisuuksia

Määritelmä (Vähennys- ja jakolasku)

- $a - b = a + (-b)$
- Jos $b \neq 0$, $\dfrac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Reaalilukujen ominaisuuksia

Järjestysaksioomat

On olemassa osajoukko $\mathbb{R}_+ \subsetneq \mathbb{R}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

1. Jokaista reaalilukua a kohti pätee tarkalleen yksi vaihtoehdoista $a \in \mathbb{R}_+$, $a = 0$ tai $-a \in \mathbb{R}_+$.
2. Jos $a, b \in \mathbb{R}_+$, niin $a + b$, $a \cdot b \in \mathbb{R}_+$.

Määritelmä

Suuremmuusrelaatio $>$ määritellään seuraavasti:

$$a > b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}_+.$$

Relaatio $\geq$ määritellään ehdolla

$$a \geq b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

Relaatiot $<$ ja $\leq$ määritellään analogisesti.

Reaalilukujen ominaisuuksia

Lause

Jos $a > b$ ja $b > c$, niin $a > c$.

Todistus:

Ensinnäkin $a > b$ tarkoittaa että $a - b \in \mathbb{R}_+$ ja vastaavasti $b > c$ tarkoittaa että $b - c \in \mathbb{R}_+$.

Järjestysaksioomien mukaan tällöin pätee

$$a - c = \underbrace{a - b}_{\in \mathbb{R}_+} + \underbrace{b - c}_{\in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{R}_+,$$

mikä puolestaan tarkoittaa että $a > c$.

Tehtävä

Mieti miksi pitää olla $1 \in \mathbb{R}_+$ ja miksi $(-1)a = -a$.

Reaalilukujen ominaisuuksia

Lause

Jos $a < c$ ja $b < d$, niin $a + b < c + d$.
Todistus. $a < c$ ja $b < d$ tarkoittavat $c - a \in \mathbb{R}_+$ ja $d - b \in \mathbb{R}_+$.
Tällöin $c + d - (a + b) = c - a + d - b \in \mathbb{R}_+$, siis

$$a + b < c + d$$

Lause

Jos $0 < a < c$ ja $0 < b < d$, niin $ab < cd$
Todistus: $a < c$ ja $b < d$ tarkoittavat sitä, että $c - a \in \mathbb{R}_+$ ja $d - b \in \mathbb{R}_+$. Lisäksi aiemmin havaitun mukaan ehdoista $0 < a$ ja $a < c$ seuraa $0 < c$, siis $c \in \mathbb{R}_+$. Tällöin

$$cd - ab = cd - cb + cb - ab = c(d - b) + b(c - a) \in \mathbb{R}_+,$$

siis $ab < cd$.

Reaalilukujen ominaisuuksia

Itseisarvo

Määritelmä:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0, \\ -x, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Huomautus

- $|x| \geq 0$.
- $|xy| = |x|\,|y|$.
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- Jos $-|y| \leq x \leq |y|$, niin $|x| \leq |y|$.
- $|x+y| \leq |x| + |y| \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- $||x| - |y|| \leq |x+y|$.

Kolmioepäyhtälö

Epäyhtälöä $|x+y| \leq |x| + |y|$ kutsutaan *kolmioepäyhtälöksi*.

Metriikka

Kahden reaaliluvun välinen etäisyys $d(x, y)$ määritellään seuraavasti: $d(x, y) = |x - y|$

Lause

Kaikille reaaliluvuille x, y ja z pätee

- $d(x, y) \geq 0$ ja $d(x, y) = 0$ vain jos $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$.
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Lause

Sekä $d(a+b, c+d)$ että $d(ab, cd)$ saadaan miten pieniksi hyvänsä, kunhan $d(a, c)$ ja $d(b, d)$ valitaan riittävän pieniksi.

- $d(a+b, c+d) = |a+b-(c+d)| = |a-c+b-d| \leq |a-c| + |b-d| = d(a, c) + d(b, d)$
- $d(ab, cd) = |ab-cd| = |ab-ad+ad-cd| = |a(b-d)+(a-c)d| \leq |a|\,|b-d| + |a-c|\,|d| = |a|\,d(b, d) + |d|\,d(a, c).$

Esimerkki

$$d(x^2, 9) = \left|x^2-9\right| = |(x+3)(x-3)| = |x+3|\,d(x, 3).$$

Jos x on niin lähellä lukua 3 että $d(x, 3) < 1$, on silloin $2 < x < 4$ ja siksi $|x+3| < 4+3 = 7$. Tällöin siis $d(x^2, 9) < 7d(x, 3)$.

Reaalilukujen ominaisuuksia

Huomautus

Myös rationaalilukujen joukko toteuttaa sekä kunta- että järjestysaksioomat. Ratkaisua yhtälöön $x^2 = 2$ ei kuitenkaan ole joukossa $\mathbb{Q}$.

Määritelmä

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

- Luku M on joukon A *yläraja*, mikäli $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \leq M)$
- Luku $S = \sup A$ on joukon A *pienin yläraja, supremum*, jos S on yläraja ja

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists a \in A)(a > S - \epsilon)$$

Täydellisyysaksiooma

Jokaisella epätyhjällä, ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on olemassa *pienin yläraja*.

Reaalilukujen ominaisuuksia

Esimerkki

Rationaalilukujen jono $3;\ 3,1;\ 3,14;\ 3,141;\ 3,1415;\ 3,14159\ \ldots$ on kasvava jono. Jos oletetaan tunnetuksi, että jono on ylhäältä rajoitettu, on täydellisyysaksiooman perusteella olemassa reaaliluku π joka on mainitun lukujoukon pienin yläraja. Tämä on se reaaliluku, jota edellämainittu rationaalilukujen jono lähestyy.

Huomautus

Jos valitaan mikä hyvänsä jono rationaalilukuja $r_1 < r_2 < r_3 \ldots < M$, niin täydellisyysaksiooman nojalla on olemassa sellainen reaaliluku α, jota jono r_1, r_2, r_3, ... lähestyy. Pienimmän ylärajan ominaisuudesta nimittäin seuraa, että $\forall \epsilon > 0$ $\alpha - \epsilon$ ei ole ko. jonon yläraja, ja siis on olemassa sellainen r_n että $\alpha - \epsilon < r_n < \alpha$.

Reaalilukujen ominaisuuksia

Ei ääretöntä alkiota

$$M + 1 > M + 0 = M$$

Määritelmä

Luku $\epsilon > 0$ on *infinitesimaali* eli äärettömän pieni, jos $\forall n$

$$n \cdot \epsilon = \underbrace{\epsilon + \epsilon + \ldots + \epsilon}_{n \text{ kpl}} < 1$$

Ei infinitesimaaleja

Jos olisi $(\forall n)\ n\epsilon < M$, on joukko $A = \{n\epsilon \mid n \in \mathbb{N}\}$ ylhäältä rajoitettu ja näin ollen sillä on pienin yläraja S. Näin ollen $S - \epsilon$ ei ole joukon yläraja ja siksi $(\exists m)\ m\epsilon > S - \epsilon$, mistä seuraa $(m+1)\epsilon > S$. Mutta $(m+1)\epsilon \in A$, joten S ei olekaan joukon yläraja.

Reaalilukujen ominaisuuksia

Seurauksia

- Jokaisella välillä (a, b) on rationaaliluku r ja irrationaaliluku α
- Desimaaliesitys
- Rationaaliset approksimaatiot.

Reaalifunktiot

Määritelmä

Funktiota $f : A \to B$ sanotaan reaalifunktioksi, jos f on määritelty jossakin joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$ ja saa arvonsa jossakin joukossa $B \subseteq \mathbb{R}$. Jos $f(x) = y$, sanotaan, että x on y:n *alkukuva*, ja y on x:n *kuva*.

Määritelmä

Olkoon $f : A \to B$ (reaali)funktio

- Funktio on *injektiivinen*, jos $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- Funktio on *surjektiivinen*, jos $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$.
- Funktio on *bijektiivinen*, jos se on sekä injektiivinen että surjektiivinen.

Luonnehdinta

Injektiivisen funktion kuvaajan jokainen vaakasuora leikkaa korkeintaan kerran. Surjektiivisen funktion kuvaajan jokainen vaakasuora leikkaa ainakin kerran.

Reaalifunktiot

Määritelmä

- Reaalifunktio on (aidosti) *kasvava*, jos
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \qquad (f(x_1) < f(x_2))$.
- Reaalifunktio on (aidosti) *vähenevä*, jos
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \qquad (f(x_1) > f(x_2))$.
- Reaalifunktio on (aidosti) *monotoninen*, jos se on joko (aidosti) kasvava tai (aidosti) vähenevä.

Lause

Aidosti monotoninen reaalifunktio on injektiivinen.

Reaalifunktiot

Määritelmä

Olkoot $f : A \to B$ ja $g : B \to C$ (reaali)funktioita. Tällöin $g \circ f : A \to C$ on *yhdistetty funktio*, joka määritellään

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Tässä merkinnässä funktiota g kutsutaan *ulkofunktioksi* ja funktiota f *sisäfunktioksi*.

Esimerkki

Jos $f(x) = -x^2$ ja $g(x) = e^x$, on

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)} = e^{-x^2}.$$

Reaalifunktiot

Määritelmä

Olkoon $f : A \to B$ (reaali)funktio. Jos on olemassa sellainen (reaali)funktio $g : B \to A$, että $(\forall x \in B)(f(g(x)) = x)$ ja $(\forall x \in A)(g(f(x)) = x)$, sanotaan että g on f:n *käänteisfunktio* ja merkitään $g = f^{-1}$.

Lause

- Funktiolla $f : A \to B$ on olemassa käänteisfunktio $f^{-1} : B \to A$ tarkalleen silloin kun f on bijektiivinen.
- Jos funktio on (aidosti) kasvava/vähenevä, niin myös sen käänteisfunktio on.

Esimerkki

Funktio $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ on bijektio. Sen käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ on bijektio. Sen käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$.

Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ei ole injektio, eikä surjektio. Näin ollen sillä ei ole käänteisfunktiota.