Mika Hirvensalo

Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot 2022

Sisällys

1 Johdanto 5
1.1 Matematiikan historiasta 5
1.2 Matematiikan opiskelusta 6
1.3 Matematiikan perusteista 6
1.4 Päättelyn muotoja 8
1.5 Kreikkalaiset aakkoset 10
1.6 Matematiikan ja logiikan merkinnöistä 10
1.6.1 Termit 10
1.6.2 Atomikaavat 11
1.6.3 Implikaatio ja ekvivalenssi 12
1.6.4 Yhdistetyt kaavat ja kvanttorit 13
1.7 Joukko-opin peruskäsitteet 14
1.8 Tärkeimmät lukujoukot 16
1.9 Summa- ja tulomerkinnät 17
1.10 Binomikaava 18

2 Reaalilukujen perusominaisuudet 23
2.1 Rationaalilukujen epätäydellisyys 23
2.2 Reaalilukujen aksiomatiikka 25
2.3 Aksiomatiikan seurauksia 28

3 Yleisimmät reaalifunktiot 31
3.1 Terminologiaa 31
3.2 Polynomi- ja rationaalifunktiot 32
3.3 Eksponenttifunktiot 33
3.4 Logaritmifunktiot 35
3.5 Trigonometriset funktiot 37
3.6 Trigonometristen funktioiden ominaisuuksia 39
3.7 Reaalifunktioiden esitystapoja 39
3.8 Rekursio 40

4 Kompleksiluvut 43
4.1 Kompleksilukujen määritelmä ja peruslaskutoimitukset 43
4.2 Kompleksilukujen graafinen esitys, itseisarvo ja polaariesitys 44
4.3 Kompleksinen eksponenttifunktio ja logaritmi 48
4.4 Kompleksinen potenssinkorotus 49
4.5 Kompleksilukujen trigonometriset funktiot 52
4.6 Algebran peruslause 53

Luku 1
Johdanto

Turun yliopistossa tekniikan alan opintoja varten on suunniteltu yhdeksän matematiikan kurssin yhteensä 25 opintopisteen laajuinen kokonaisuus:

- **Matematiikan perustiedot** (2 op)
- Differentiaali- ja integraalilaskenta (4 op)
- Lineaarialgebra (4 op)
- Todennäköisyyslaskenta (3 op)
- Diskreetti matematiikka (3 op)
- Differentiaaliyhtälöt (3 op)
- Usean muuttujan funktiot 1 (2 op)
- Usean muuttujan funktiot 2 (2 op)
- Fourier-analyysi (2 op)

Näistä tulee koulutusohjelmakohtaisesti valita suoritettavaksi 20 opintopistettä. Ohjeita valintaan saa opinto-oppasta tai opinto-ohjaajalta, mutta kaikille yhteisiä ovat joka tapauksessa Matematiikan perustiedot, Differentiaali- ja integraalilaskenta, sekä todennäköisyyslaskenta. Koulutusohjelmakohtainen valinta tapahtuu siis vasta kevätlukukaudella.

1.1 Matematiikan historiasta

Encyclopædia Britannican hyvin osuvan kuvailun mukaan matematiikka on rakennetta, järjestystä ja suhteita käsittelevä tiede, joka on kehittynyt yksinkertaisesta lukumäärien laskemisesta, mittaamisesta ja muotojen kuvailusta.

Laskemisen taito vaikuttaa selvästi kirjoitustaitoa vanhemmalta, eikä sen syntyä siksi voi ajoittaa historiantutkimuksen keinoin. Varhaisin laskemiseen viittaava arkeologinen löydös on peräisin Lebombon alueelta Etelä-Afrikasta löydetty paviaanin pohjeluu, johon on noin 44 000 vuotta sitten uurrettu 29 viiltoa. Jotkut arkeologit pitävät tätä varhaisimpana todisteena kuun- tai kuukautiskierron päivien laskemisesta.

Věstonicesta Tšekin alueelta löydetty, noin 30 000 vuoden taakse ajoitettuun suden värttinäluuhun uurretujen viiltojen uskotaan olevan varhaista ns. tukkimiehen kirjanpitoa. Kongon Ishangosta noin 20 000 vuoden taakse ajoitettuun luuhun koverrettujen uurteiden arvellaan esittävän yhteenlaskuja ja niiden vertailua. Arkeologisten löydösten tulkinta on kuitenkin parhaimmillaankin epävarmaa.

Muinaisen Babylonian matematiikalla tarkoitetaan yleensä nykyisen Irakin alueella vallinneiden kulttuurien laskemisen taitoa. Varhaisin näistä lienee sumerilainen kulttuuri, jossa mittausjärjestelmien kehittäminen nousi tärkeään asemaan yli 6 000 vuotta sitten. Varhaisimmat löydetyt kertotaulut ajoittuvat noin 4 500 vuoden taakse Babylonian kulttuuripiiriin, ja sielä ovat myös peräisin varhaisimmat abstraktin matematiikan harjoittamisesta kertovat dokumentit. Babylonian muinaisessa matematiikassa käytetty 60-kantainen lukuesitys on jättänyt nykypäivään kestävät jälkensä: ei ole sattumaa että tunti jaetaan 60 minuuttiin ja tämä edelleen 60 sekuntiin. Myös täyden ympyrän astemäärä 360° on samaa perua.

Noin neljän vuosituhannen takaisesta Egyptiläisestä kulttuurista on nykypäiviin säilynyt hyvin tulkittavissa olevia kirjallisia dokumentteja aritmetiikan, lukuteorian, geometrian ja algebran harjoittamisesta. Erityisesti geometrian kehitykseen muinaisen Egyptin kulttuurissa uskotaan vaikuttaneen peltomaiden uudelleenmittauksen jokavuotisen tarpeen Niilin tulvakauden jälkeen. Löydetyn aineiston perusteella matematiikan harjoittaminen oli kuitenkin pitkään varsin hajanaisten perusteiden varassa, eikä yhtenäistä lähestymistapaa ollut nähtävissä.

Ajanlaskun alkua edeltävinä vuosisatoina matematiikka nousi kreikkalaisessa kulttuurissa kukoistukseen, jolle ei löytynyt vertaista ennen uuden ajan alkua. Thales, Eudoksos, Pythagoras, Eukleides, ja Arkhimedes ovat nimiä, jotka mainitun aikakauden muiden merkittävien filosofien ohella ovat pysyvästi kirjattuna matematiikan historiaan. Eukleides ei pelkästään koonnut aikakautenaan tunnettua matematiikkaa yhteen teokseen, vaan esitti sen myös loogisesti aksiomaattis-deduktiivisessa muodossa. Eukleideen esitystä voidaan nykypäivän standardeilla kritisoida monella tapaa, mutta viimeistään tuolloin matematiikkaa vakiinnutti asemansa tieteenä, jonka kaukaisimmat perusteet ovat suurelta osin säilyneet 2000-luvulle asti. Saavutus on merkittävä, sillä muita nykykriteerein tieteiksi miellettäviä oppikokonaisuuksia ei antiikin aikoina ollut, ja nykyaikaiset luonnontieteet kuten fysiikka ja kemia ovat muotoutuneet vasta 1700-luvulta alkaen, pari vuosituhatta Eukleideen jälkeen.

Vasta 1600-luvulla alkanut ja nykypäiviin jatkuva matematiikan nousukausi Sir Isaac Newtonin ja Gottfried Leibnizin kehittämän differentiaalilaskennan myötä ylitti antiikin ajan kreikkalaisten saavutukset. 1800-luvun puolivälin jälkeen alkaneen kehityksen myötä matematiikka on jakautunut kymmeniin, jopa satoihin osa-alueisiin, ja ensikatsomalta saattaa näyttää, että joillakin alueilla on varsin vähän tekemistä toistensa kanssa. Syvällisempi perehtyminen kuitenkin paljastaa, että eri osa-alueita yhdistävät useat rakenteelliset piirteet.

1.2 Matematiikan opiskelusta

Laajojen matematiikan kokonaisuuksien omaksuminen yleensä helpottuu, mikäli pelkkien laskumenetelmien lisäksi perehdytään myös perusteisiin. Insinöörimatematiikan opintokokonaisuus poikkeaakin lukiomatematiikan kursseista luultavasti eniten siinä, että tällä kurssikokonaisuudella perehdytään matematiikan rakenteisiin lukiokursseja syvällisemmin. Kurssin ensimmäinen mieleenpainettava asia onkin seuraava: **ainoa keino matematiikan kunnolliseen osaamiseen kulkee perusteiden ja käsitteiden hyvän hallinnan kautta.**

Opinnot jakautuvat luentoihin ja harjoitustehtäviin. Yleisesti hyväksi koetun käytännön mukaan harjoitustehtävien yhteydessä kannattaa varmistaa, että ratkaisun perustelut tulivat ymmärretyksi. Matematiikan opinnoissa pidetään yleensä oikeita perusteluja tärkeämpinä kuin virheetöntä ratkaisua, sillä oikeiden perustelujen myötä saatu virheellinen ratkaisu johtuu usein helposti korjattavissa olevasta erehdyksestä. Sen sijaan virheelliset perustelut voivat johtaa oikeaan ratkaisuun vain sattumalta.

1.3 Matematiikan perusteista

Matematiikka eroaa luonnontieteistä (esim. fysiikka, kemia, biologia) ja yhteiskuntatieteistä (esim. sosiologia, taloustiede) oleellisesti siinä, että matematiikan väitteitä ei yleensä voida todentaa (*verifioida*) tai kumota (*falsifioida*) empiirisesti, siis havaintojen perusteella. Filosofian termein tämä voidaan ilmaista myös siten, että matematiikan käsitteitä ei kytketä reaalimaailman olioihin operationaalisesti.

Historiallisesta näkökulmasta katsoen on huomautettava että matemaattiset teoriat tosin varsin usein muodostetaan jonkin konkreettisen tarpeen mukaan. Tällöin myös peruskäsitteet, -ominaisuudet ja -suhteet yleensä syntyvät reaalimaailman olioista abstraktion (jota suomeksi voitaneen kutsua rakenteiden ja niiden ominaisuuksien tiivistämiseksi tai pelkistämiseksi) kautta. Esimerkiksi lukumäärän käsite on tunnettu jo ihmiskunnan esihistoriassa, mutta *lukuja* yksi, kaksi, kolme, jne. ei sellaisenaan ole fysikaalisina olioina olemassa. Ne ovat ainoastaan ihmismielen abstrakteja eli tiivistettyjä kuvia reaalimaailmassa esiintyvistä konkreettisista asiantiloista. Vaikka matemaattisten objektien kuten lukujen toivotaan kuvaavan hyvin reaalimaailman käsitteitä (esim. lukumääriä ja niiden yhdistämistä lisäämällä, kertomalla tai vähentämällä), ei matematiikan luku- tai muidenkaan käsitteiden ominaisuuksia voida silti yleisesti perustella havaintojen pohjalta. Havainnot voivat kyllä tukea ja joissain tapauksissa myös kumota matemaattisen väittämän, mutta tyypillisin ongelma nousee siitä tosiseikasta, että matemaattiset teoriat pyrkivät yleensä puhumaan *äärettömästä* määrästä tapauksia, kun taas havainnot voivat kattaa vain äärellisen määrän.

Esimerkki 1. Lukujen liitännäislaki eli *assosiatiivisuus* tarkoittaa sitä, että

$$(a+b)+c = a+(b+c), \tag{1.1}$$

olivatpa a, b ja c mitä hyvänsä lukuja. Kun $+$ ymmärretään tavallisena yhteenlaskuna, on hyvin ymmärrettävää, että assosiatiivisuus pätee kaikille reaalimaailman lukumäärille. Sen sijaan assosiatiivisuus *matemaattisena* väittämänä ei ole itsestään selvä, sillä luvut a, b, ja c pitää ymmärtää reaalimaailmasta riippumattomiksi olioiksi. Sama pätee abstraktien olioiden a, b ja c yhteenlaskulle: sen matemaattinen muoto ei ole konkreettista lukumäärien yhdistämistä, koska matemaattisesssa teoriassa a, b ja c ovat vain lukumäärien ideaalisia vastineita, eivätkä lukumääriä. Tämän vuoksi liitännäislakia (1.1) ei voida matemaattista teoriaa muodostettaessa pitää itsestään selvänä, vaan se pitää kirjata teorian perusominaisuudeksi, *aksioomaksi*. Vaihtoehtoisesti perusominaisuudeksi voidaan kirjata jokin muu, josta (1.1) loogisesti seuraa.

Matemaattisessa teoriassa tärkeämpää kuin itse oliot ovat aina niiden väliset *suhteet ja operaatiot*. Juuri tämän vuoksi matematiikan sanotaan olevan *suhteen*, *rakenteen* ja *järjestyksen* tiede. Käsiteltävien perusolioiden *ontologialla* eli olemassaolon luonteella ei ole merkitystä, vaan ainoastaan sillä, miten matemaattiset objektit toisiinsa suhtautuvat. Esimerkiksi luonnollisten lukujen teorian ymmärtämisen kannalta ei ole tärkeää saavuttaa ymmärtämystä luonnollisten lukujen olemuksesta, siis siitä *mitä* objektit 1, 2, 3, ... ovat, vaan siitä, mitkä ovat niiden väliset operaatiot ja suhteet. Tietysti perusolioista määritelmien kautta rakennettavien olioiden luonteella on merkitystä, mutta vain määritelmän ymmärtämisen kannalta. Esimerkiksi *matriisi* (käsitellään osassa Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra) määritellään tietyntyyppisenä reaalilukukaaviona, ja tällöin tulee ymmärtää mitä reaalilukujen sijoittuminen kaavioon merkitsee matriisioperaatioiden kannalta. Tämä voidaan ilmaista myös siten, että matemaattisen käsitteen *matriisi* ontologia rakennetaan jo olemassaolevian matemaattisten käsitteiden päälle.

Kaikki matemaattiset teoriat voidaan esittää *aksiomaattis-deduktiivisessa* muodossa, jossa teorian perusolioiden ja -suhteiden olemassaolo esitetään määritelminä tai *aksioomina* eli perusväittäminä. Muut teorian väittämät eli *lauseet* eli *teoreemat* johdetaan loogisesti eli *dedusoidaan* aksioomista tai jo aiemmin dedusoiduista väittämistä. Matemaattinen *teoria* tarkoittaa niiden lauseiden joukkoa, jotka voidaan aksioomista johtaa.

Esimerkki 2. Luonnollisten lukujen teoriassa voidaan peruskäsitteiksi valita luvut 1, 2, 3, ... ja niiden yhteenlasku $+$. Yhdeksi teorian aksioomaksi voidaan valita liitännäislaki (1.1). Yleensä näin ei kuitenkaan tehdä, vaan luonnollisten lukujen teoria perustetaan vielä alkeellisempiin käsitteisiin. Nämä esitetään esimerkissä 3.

Matemaattisen teorian kannalta on tärkeää, että teorian peruskäsitteet ja aksioomat olisivat mahdollisimman yksinkertaiset, sillä abstraktista olemuksestaan huolimatta matemaattisen teorian toivotaan yleensä kuvaavan mahdollisimman hyvin jotain fyysiseen maailmaan liittyvää asiaa. Jos teorian peruskäsitteet ja aksioomat ovat mahdollisimman harvalukuiset ja yksinkertaiset, on helpompaa varmistua siitä, että ne kuvaavat tarkasti toivottuja fysikaalisen maailman olioita.

Toinen syy aksioomajärjestelmien yksinkertaisuuspyrkimykseen on seuraava: osoittautuu, että jos teorian aksioomat ovat *ristiriitaiset*, voidaan niistä loogisesti johtaa mitä hyvänsä. Erityisesti voidaan johtaa mikä hyvänsä väitelause ja sen kielto. Teoriaa ei siis voida pitää hyväksyttävänä (tai edes mielenkiintoisena), jos sen aksioomat ovat keskenään ristiriitaiset.

Tämän vuoksi teorian aksioomien yksinkertaisuus on erittäin suotavaa: on uskottavaa, että ristiriitaisuudet näkyvät helpommin, mikäli aksioomat ovat yksinkertaisia. Ikävä kyllä tämä pitää paikkansa vain äärimmäisen yksinkertaisissa matemaattisissa teorioissa. Yleensä ristiriidattomuus on erittäin hankalasti (jos lainkaan) todennettavissa: 1900-luvun alkupuolella matematiikan ja logiikan perusteiden tutkimus on osoittanut, että lähes kaikkien mielenkiintoisten matemaattisten teorioiden aksioomajoukkojen ristiriidattomuutta ei voida teoriassa itsessään lainkaan todentaa. Ns. Gödelin toisen epätäydellisyyslauseen mukaan teorian ristiriidattomutta ei teorian puitteissa voida todentaa, jos teoria on kyllin rikas puhuakseen luonnollisista luvuista.

Esimerkki 3 (Giuseppe Peanon aksiomatisointi luonnollisille luvuille). Luonnollisten lukujen teorian *peruskäsitteet* ovat joukko $\mathbb{N}$, luonnollinen luku $1 \in \mathbb{N}$ ja luonnollisen luvun *n seuraaja* $s(n)$. Teorian aksioomat ovat seuraavat:

1. Jos $n \neq m$, niin $s(n) \neq s(m)$ (kahdella eri luonnollisella luvulla on eri seuraaja).
2. Kaikille joukon $\mathbb{N}$ alkioille n pätee $s(n) \neq 1$ (ykkönen ei ole minkään luonnollisen luvun seuraaja).
3. Jos joukko A sisältää luvun 1 ja jokaisen sisältämänsä luvun seuraajan, niin silloin A sisältää kaikki luonnolliset luvut (*induktioaksiooma*).

Näistä peruskäsitteistä ja aksioomista lähtien johdetaan kaikki luonnollisten lukujen ominaisuudet. Esimerkiksi yhteenlaskun määrittely voidaan aloittaa määrittelemällä $1+n = n+1 = s(n)$ ja laajentaa tästä koskemaan kaikkia summia $n+m$. Samoin käsitteet *suurempi kuin* ja *pienempi kuin* voidaan määritellä käyttäen pelkästään mainittuja peruskäsitteitä.

Vaikka Peanon aksioomat ovat yksinkertaiset, ei niiden ristiriidattomuutta voida todentaa perinteisen matematiikan puitteissa. Ristiriidattomuus voidaan todistaa pidemmälle viedyn matematiikan avulla, mikäli tiettyjen äärettömien objektien ominaisuuksista oletetaan riittäviä säännönmukaisuuksia.

Luonnollisten lukujen teoriaa voidaan laajentaa kokonaislukujen teoriaksi uusia käsitteitä määrittelemällä. Samoin voidaan kokonaisluvuista päästä rationaalilukuihin ja edelleen reaalilukuihin. Toisaalta määritelmät voivat olla varsin monimutkaisia, ja siksi yleensä on perusteltua aksiomatisoida reaaliluvut erikseen.

1.4 Päättelyn muotoja

Aiemmassa luvussa manittiin, että matemaattiset teoriat muodostetaan aksioomista ja peruskäsitteistä lähtien rakentamalla näiden päälle uusia käsitteitä ja loogisesti johtamalla aksioomista muita väitteitä (lauseita). Tässä luvussa tarkastellaan lyhyesti matematiikassa käytettävän päättelyn luonnetta.

Päättelyn eri muodoista voidaan mainita ainakin *deduktiivinen*, *induktiivinen* ja *abduktiivinen* päättely. Deduktiivisessa päättelyssä oletuksista johdetaan *päättelysääntöjä* käyttämällä johtopäätöksiä. Induktiivisessa päättelyssä johdetaan joukosta tapauksia yleinen sääntö, ja abduktiossa taas tyypillisesti tunnetuista säännönmukaisuuksista ja seurauksesta päätellään *mitä on tapahtunut*.

Induktiivinen päättely on tyypillistä luonnontieteille, osalle yhteiskuntatieteistä ja lääketieteelle. Induktiossa päätellään, että sääntö, joka toimii havaittujen tapausten yhteydessä, pätee myös yleisesti (”kaikki joutsenet jotka olemme nähneet ovat valkoisia, siis *kaikki* joutsenet ovat valkoisia”). Induktiivinen päättely ei ole loogisesti sitovaa (Australiassa on mustia joutsenia; *Cygnus atratus*), mutta induktiivisen päättelyn epävarmuutta voidaan toisinaan arvioda tilastollisin menetelmin. Erityisen tärkeää induktion epävarmuuden arviointi on lääketieteessä: halutaan, että johtopäätös ”lääkkeellä ei ole haittavaikutuksia” pitää paikkansa mahdollisimman suurella todennäköisyydellä, vaikka lääkettä on voitu testata vain rajalliseen ihmisjoukkoon.

Abduktiivinen päättely on tunnettua erityisesti salapoliisitarinoista: ”Herra X:n nähtiin poistuvan murhapaikalta, kenenkään muun ei nähty poistuvan murhapaikalta, siis herra X on murhaaja”. Abduktiivista päättelyä käytetään jossakin määrin yhteiskuntatieteissä ja humanistisissa tieteissä, mutta induktion tavoin abduktiivinen päättely ei ole loogisesti sitovaa. Looginen sitovuus tarkoittaa sitä, että premissien (oletusten) ollessa tosia ovat johtopäätökset myös tosia.

Matemaattisten väittämien (lauseiden) todistamiseen käytetään ainoastaan loogisesti sitovaa, deduktiivista päättelyä. Tämänlainen päättely voidaan periaatteessa formalisoida käyttämällä *predikaattilogiikkaa* ja esittelemällä äärellinen määrä päättelysääntöjä, joista voidaan jokaisesta todeta, että oletusten ollessa tosia on myös johtopäätös tosi.

Tällaisen formalismin esittely veisi kuitenkin liiaksi ajallisia resursseja eikä sellaista siksi tällä kurssikokonaisuudella esitetä. Esimerkkinä voidaan kuitenkin mainita seuraava:

Esimerkki 4. Modus ponens on tyypillinen deduktiivisen päättelyn sääntö. Se voidaan esittää kaaviomuodossa

$$\frac{\phi \quad \phi \to \psi}{\psi},$$

joka tulkitaan siten, että logiikan kaavoista ϕ ja $\phi \to \psi$ (oletukset eli premissit) voidaan päätellä johtopäätös ψ.

Tämän luvun lopuksi tarkastellaan lyhyesti matemaattisen teorian väitteiden *totuusarvoa*. Aksiomaattis-deduktiivisessa teoriassa teoriaa koskevat väittämät eli lauseet johdetaan loogisesti aksioomista, joten lauseiden totuus palautuu tällöin aksioomien totuuteen ja loogisten päättelysääntöjen pätevyyteen.

Päättelysääntöjen pätevyydestä puhutaan enemmän seuraavassa luvussa, mutta jo tässä yhteydessä voidaan todeta, että *yleensä aksioomien totuusarvo on matemaattisen teorian kehittämisen kannalta täysin yhdentekevä seikka* ja matemaattisen teorian lausetta sanotaan todeksi, mikäli se on johdettavissa aksioomista.

On kuitenkin jälleen muistutettava, että matemaattisen teorian aksioomia ei yleensä valita mielivaltaisesti, vaan niiden toivotaan kuvaavan mahdollisimman hyvin teorian objektien ominaisuuksia. Jos esimerkiksi halutaan teorian kuvaavan luonnollisia lukuja, on syytä valita aksioomat siten, että ne eivät ainakaan ole ristiriidassa luonnollisia lukuja koskevan intuition kanssa.

Totuuden käsitteen kannalta matemaattista teoriaa voidaan verrata vaikkapa shakkipeliin: pelin alkuasetelma vastaa aksioomajoukkoa ja sääntöjen mukaiset siirot päteviä päättelysääntöjä. Kukin säännönmukaisilla siirroilla saatu asetelma vastaa matemaattisen teorian lausetta ja tällöin matemaattisen teorian yhteydessä usein esiintyvä kysymys ”onko tämä lause tosi?” vastaa shakkipelissä kysymystä ”voidaanko tällainen asetelma saada pelisääntöjä noudattamalla?”

Shakkipelissä ei oteta kantaa siihen kysymykseen, onko pelin alkuasetelma jollakin tavalla ”tosi”, ja sama pätee myös matemaattiseen teoriaan. Oleellista on se, mitä aksioomista voidaan loogisesti johtaa.

Esimerkki 5. Syllogismi on deduktion muoto, jossa kahdesta premissistä (suomeksi lähtökohta) (pääpremissi ja alipremissi) päätellään *johtopäätös*.

$$\frac{\underset{\text{(pääpremissi)}}{\text{Jokainen ihminen on kuolevainen}} \qquad \underset{\text{(alipremissi)}}{\text{Sokrates on ihminen}}}{\underset{\text{(johtopäätös)}}{\text{Sokrates on kuolevainen}}}$$

Harjoitustehtävä: Mitä voidaan ylläolevasta syllogismista sanoa a) jos pääpremissi poistetaan b) jos johtopäätös ei ole tosi?

Taustatietoa

Aristoteles (Αριστοτέλης, 384 eKr–322 eKr) oli kreikkalainen filosofi, jonka katsotaan Sokrateen ja Platonin ohella vaikuttaneen eniten länsimaiseen ajatteluun. Aristoteles käsitteli lähes kaikkea inhimillisen toiminnan piiriin kuuluvaa, luonnontieteistä valtiotieteisiin ja taiteisiin. Aristoteles analysoi loogista päättelyä ja kehitti syllogistisen logiikan. Aristotelesta sanotaan usein logiikan isäksi.

(kuva: Wikimedia Commons)

1.5 Kreikkalaiset aakkoset

Matematiikan lisäksi useilla luonnontieteen aloilla käytetään kreikkalaisia aakkosia, jotka on siis syytä opetella. Joistakin pienistä kirjaimista käytetään kahta eri muotoa.

alfa	A	α	ioota	I	ι	rhoo	P	ρ
beta	B	β	kappa	K	κ, $\varkappa$	sigma	Σ	σ, ς
gamma	Γ	γ	lambda	Λ	λ	tau	T	τ
delta	Δ	δ	myy	M	μ	ypsilon	Υ	υ
epsilon	E	ε	nyy	N	ν	fii	Φ	ϕ, φ
zeeta	Z	ζ	ksii	Ξ	ξ	khii	X	χ
eeta	H	η	omikron	O	o	psii	Ψ	ψ
theeta	Θ	θ, ϑ	pii	Π	π, ϖ	oomega	Ω	ω

1.6 Matematiikan ja logiikan merkinnöistä

Matematiikan merkinnöissä keskeisiä käsitteitä ovat *termit* ja *kaavat*, joiden merkitystä selostetaan tässä luvussa.

1.6.1 Termit

Yksinkertaisimpia termejä ovat *vakiosymbolit* ja *muuttujasymbolit*, joilla ei katsota olevan sisäistä rakennetta. Vakiosymboleista esimerkkeinä voidaan esittää 0, 1, 4, 72, 127, 922 ja muuttujasymboleista vastaavasti vaikkapa x, y, z, x_1, a_4 ja q_5.

Vakio- ja muuttujasymbolien lisäksi käytetään *funktiosymboleja*, joita käyttämällä voidaan muodostaa monimutkaisempia termejä. Esimerkkeinä funktiosymboleista voidaan mainita $+$, $\cdot$, sin, $(\ )^2$ jne. Funktiosymbolit voivat olla 0- 1-, 2-, tai useampipaikkaisia. Esimerkiksi $+$ käsitetään yleensä kaksipaikkaiseksi funktiosymboliksi, johon liitetään kaksi vakiosymbolia. Täten $2+4$ on termi, jossa $+$ on kaksipaikkainen funktiosymboli, johon on liitetty vakiosymbolit 2 ja 4. Samoin potenssiin korottaminen 2^3 käsitetään kaksipaikkaiseksi funktiosymboliksi, johon on liitetty vakiosymbolit 2 ja 3. Monissa matematiikkaohjelmissa, Matlab mukaanlukien, potenssiin korotus esitetään muodossa `2^3`. Trigonometrinen merkintä $\sin x$ voidaan ymmärtää yksipaikkaiseksi funktiosymboliksi.

Integraalimerkintä

$$\int_2^5 tx^3\,dx \tag{1.2}$$

voidaan käsittää nelipaikkaiseksi funktiosymboliksi. Matlab-ohjelmistossa yllämainittu integraali syötetään muodossa

```
int(t*x^3,x,2,5)
```
(1.3)

Merkintä (1.3) korostaa funktiosymbolin nelipaikkaisuutta: sulkeiden sisällä on neljä ”paikkaa” joita pilkut erottavat. Ensimmäinen paikka on varattu integrandille tx^3, toinen integrointimuuttujalle x, kolmas integraalin alarajalle 2 ja neljäs integraalin ylärajalle 5.

Mikä hyvänsä vakiosymboli voidaan katsoa nollapaikkaiseksi funktiosymboliksi, eikä mitään loogista syytä erottaa näitä toisistaan olekaan. Esimerkiksi vakiosymbolit 2tai 9 ovat riippumattomia mistään muuttujista, siis nollapaikkaisia funktiosymboleja. Sen sijaan on täysin makuasia, katsotaanko esimerkiksi merkintä -2 yhdeksi vakiosymboliksi vaiko vakiosymbolin 2 ja yksipaikkaisen funktiosymbolin $-$ yhdisteeksi.

Tiukan muodollisessa esityksessä ei käytetä tavanomaisia matematiikan merkintöjä $+$, a^b tai $\sin x$, vaan funktiosymboleista käytetään kirjainmerkintöjä, ja ns. infix-merkintä $x+y$ korvataan merkinnällä $+(x,y)$. Haluttaessa voidaan myös $+$ korvata jollain muulla symbolilla, esimerkiksi s ja täten yhteenlasku merkitä muotoon $s(x,y)$. Samoin potenssimerkintä voitaisiin ajatella merkittävän muodossa $p(x,y)$, jonka tulkinta olisi tavallinen potenssiin korotus tai x^y. Insinöörimatematiikan kurssikokonaisuudessa ei ole kuitenkaan tarpeen käyttää logiikan muodollisia esityksiä, vaan funktiosymboleja kuvaamaan käytetään vakiintuneita perinteisiä merkintöjä.

Termien muodostus siis tapahtuu seuraavien säänntöjen mukaan: 1) vakio- ja muuttujasymbolit ovat termejä. 2) Jos f on n-paikkainen funktiosymboli ja t_1, …, t_n ovat termejä, on myös

$$f(t_1,\ldots,t_n) \tag{1.4}$$

termi. Kurssikokonaisuuden osassa Insinöörimatematiikka: Diskreetti matematiikka esitetään myös muita tällä tavoin *rekursiivisesti* määriteltyjä rakenteita.

On huomioitava että monien funktiosymbolien käyttö on historiallisesti vakiintunut aivan toisenlaiseksi kuin muotoon (1.4). Tästä esimerkkinä ovat yllä summamerkintä (ei merkitä $s(x,y)$ vaan $x+y$), potenssimerkintä (ei merkitä $p(x,y)$ vaan x^y) ja integraalimerkintä (ei merkitä muodossa (1.3) vaan muodossa (1.2)). Lukuunottamatta historian saatossa hyvin vakiintuneita matematiikan merkintöjä monissa matematiikkaohjelmistoissa käytetään kuitenkin melko tyyppiä 1.4 olevaa merkintää.

Huomautus 1. Yhteenlasku käsitetään yleensä kaksipaikkaisena funktiosymbolina, mutta tästä huolimatta ainakin reaaliluvuille merkintä $a+b+c$ on täysin mielekäs. Tämä voidaan nimittäin käsittää joko muodossa $(a+b)+c$ tai muodossa $a+(b+c)$, joissa kummassakin esiintyy vain kaksipaikkainen yhteenlasku. Kummatkin muodot tarkoittavat samaa asiaa, koska reaaliluvuille pätee liitäntälaki (1.1).

Tämän yleistyksenä voidaan määritellä useampipaikkainen yhteenlasku $a_1+a_2+\ldots+a_n$ olipa n mikä hyvänsä.

1.6.2 Atomikaavat

Atomikaavat ovat kaikkein yksinkertaisimpia kaavoja, ja ne koostetaan termeistä joko *yhtäsuuruutta* tai *relaatiosymbolia* käyttämällä. Aivan kuten funktiosymbolit, voivat myös relaatiosymblit R olla niinikään 0-, 1-, 2-, tai useampipaikkaisia. Formaalin logiikan merkinnöillä n-paikkaisesta relaatiosymbolista R käytetään tyypillisesti merkintää $R(t_1,\ldots,t_n)$, missä t_1, …, t_n ovat termejä. Samoin kuin funktiosymbolien kohdalla, on huomattava että matematiikassa käytetään lukuisia vakiintuneita relaatiosymboleja, joiden merkintätapa poikkeaa tiukan muodollisesta logiikan merkintätavasta.

Relaatioiden käsitettä ja olemusta käsitellään tarkemmin kurssilla Insinöörimatematiikka: Diskreetti matematiikka. Tässä luvussa relaatioita ja relaatiosymboleja käsitellään lähinnä esimerkkien kautta.

Luultavasti kaikkein tunnetuin relaatiosymboli on $<$ (tulkinta: pienempi kuin), joka voidaan käsittää kaksipaikkaiseksi relaatiosymboliksi. Tällöin $4<2$ on kaava, jossa kaksipaikkaiseen relaatiosymboliin $<$ on liitetty vakiosymbolit 4 ja 2. Samoin kuin funktiosymbolien tapauksessa, merkintää $4<2$ kutsutaan infix-merkinnäksi ja logiikan kannalta muodollisempi merkintä olisi $<(4,2)$. Olisi toki myös mahdollista korvata $<$ kokonaan toisella, vaikkapa kirjainmerkinnällä L. Tällöin siis merkitä $x<y$ korvattaisiin kokonaan merkinnällä $L(x,y)$.

Esimerkkeinä muista relaatiosymboleista voidaan mainita $\leq$ (pienempi tai yhtäsuuri kuin), $>$ (suurempi kuin) ja $\geq$ (suurempi tai yhtäsuuri kuin). Nämä kaikki ovat kaksipaikkaisia relaatiosymboleja.

Esimerkki 6. Kolmiulotteisen avaruuden piste voidaan esittää kolmella koordinaatilla muodossa (x,y,z). Tason yhtälö kolmiulotteisessa avaruudessa puolestaan on (käsitellään tarkemmin kurssilla Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra) muotoa $ax+by+cz=d$, missä a, b, c ja d ovat vakioita. On mahdollista määritellä kolmepaikkainen relaatiosymboli $T(x,y,z)$, joka tulkitaan todeksi, mikäli $ax+by+cz=d$ ja epätodeksi mikäli $ax+by+cz=d$. Relaatiosymboli T siis ilmaisee onko kolmen reaaliluvun määrittämä piste (x,y,z) tasolla vaiko ei.

Ylläolevan esimerkkiä laajentamalla (miten?) on mahdollista määritellä myös useampipaikkaisia relaatiosymboleja.

Määritelmä 1. Atomikaava on muotoa $t_1 = t_2$ tai $R(t_1,\ldots,t_n)$, missä R on relaatiosymboli ja t_1, ..., t_n ovat termejä. Ensiksimainittua atomikaavaa kutsutaan myös *yhtälöksi*.

Esimerkki 7. x on muuttujasymboli ja 0, 3 ja 5 ovat vakiosymboleja. Neliöön korotus voidaan katsoa yksipaikkaiseksi funktiosymboliksi, kertolasku ja yhteenlasku kaksipaikkaisiksi. Täten $3x$, x^2 ovat termejä ja nämä voidaan yhdistää monimutkaisemmaksi termiksi x^2+3x. Tästä ja vakiosymbolista 5 voidaan edelleen rakentaa termi x^2+3x+5 (katso huomautus (1)).

Nyt esimerkiksi $x^2+3x+5=0$ ja $x^2+3x+5>0$ ovat atomikaavoja. Näistä ensimmäinen on yhtälö.

Huomautus 2. Jatkossa puhutaan myös atomikaavojen yleistyksistä, mutta jo tässä vaiheessa on syytä huomauttaa merkittävästä erosta termien ja kaavojen välillä: Termit tulkitaan jokin joukon alkioiksi, kun taas kaavojen tulkintana on aina totuusarvo ”tosi” tai ”epätosi”.

Esimerkki 8. x^3-5x^2+3x+2 on termi. Se voi saada arvokseen esimerkiksi reaaliluvun, kompleksiluvun tai matriisin. $x^3-5x^2+3x+2=7x+3$ puolestaan on (atomi)kaava, tarkemmin sanottuna yhtälö, joka voi olla tosi tai epätosi.

Huomautus 3. Tarkkaavainen lukija saattaa huomata että yhtäsuuruusmerkin avulla muodostettu atomikaava $t_1=t_2$ muistuttaa hyvin paljon kaksipaikkaisen relaatiosymbolin avulla muodostettua kaavaa. Periaatteessa voitaisiin luopua yhtäsuuruusmerkistä ja merkinnän $t_1=t_2$ sijaan käyttää vaikkapa merkintää $E(t_1,t_2)$, joka tulkittaisiin todeksi, mikäli t_1 ja t_2 tulkitaan yhtäsuuriksi, ja epätodeksi muutoin.

Itse asiassa joissakin logiikan oppikirjoissa menetelläänkin juuri tällä tavoin, siis käsittämällä yhtäsuuruus vain tavalliseksi kaksipaikkaiseksi relaatiosymboliksi. Tässä lähestymistavassa saattaa kuitenkin piillä ongelma, mikäli yhtäsuuruutta määrittävä relaatiosymboli sallitaan *tulkittavan* vapaasti. Sekä funktio- että relaatiosymbolien tulkintaa käsitellään tuonnempana.

1.6.3 Implikaatio ja ekvivalenssi

Kahden kaavan väliin asetetaan implikaatiomerkki $\Rightarrow$ mikäli jälkimmäinen kaava on tosi aina kun ensimmäinenkin on. Ekvivalenssimerkki $\Leftrightarrow$ asetetaan kaavojen väliin kun kaavat ovat yhtä aikaa tosia. Näin saatuja merkintöjä kutsutaan myös kaavoiksi, vaikkakaan ne eivät seuraakaan tarkkaa logiikan formalismia. Seuraava merkintätapa on kuitenkin puutteellinen, sillä kaavojen välissä ei ole mitään välimerkkejä:

$$\begin{aligned}
&x^2-2x+1=0\\
&(x-1)^2=0\\
&x-1=0\\
&x=1
\end{aligned}$$

Myös seuraava merkintätapa on virheellinen, koska kaavojen väliin ei pidä asettaa yhtäsuuruusmerkkiä:

$$\begin{aligned} & x^2-2x+1=0 \\ = \quad & (x-1)^2=0 \\ = \quad & x-1=0 \\ = \quad & x=1 \end{aligned}$$

Oikea merkintätapa on

$$\begin{aligned} & x^2-2x+1=0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-1)^2=0 \\ \Leftrightarrow \quad & x-1=0 \\ \Leftrightarrow \quad & x=1. \end{aligned}$$

Implikaatiomerkkiä voidaan käyttää esimerkiksi seuraavassa tilanteessa:

$$x=5 \Rightarrow x^2=25.$$

Implikaatiomerkin molemmilla puolilla on atomikaava, joten merkintä on syntaksin mielessä oikeanlainen. Tavanomaisen tulkinnan puitteissa merkintä on myös semanttisesti tosi, sillä se väittää, että ehdosta $x=5$ seuraa $x^2=25$.

Merkintä

$$x^2=25 \Rightarrow x=5$$

on syntaktisesti oikein. Kumpikin implikaatiomerkin puoli on kaava (tarkemmin sanottuna yhtälö), jotka voidaan periaatteessa yhdistää implikaatiomerkilla $\Rightarrow$. Sen sijaan yllä oleva, implikaatiomerkin avulla kahdesta kaavasta rakennettu kaava on tavallisen tulkinnan kannalta epätosi, sillä ehdosta $x^2=25$ ei välttämättä seuraa $x=5$ (miksi?).

Kahden termin väliin ei aseteta implikaatiomerkkiä, joten seuraava merkintätapa on virheellinen:

$$\int_0^3 x^2\,dx \Rightarrow \mathop{\Big/}_{0}^{3} \frac{1}{3}x^3 \Rightarrow \frac{1}{3}3^3 \Rightarrow 9.$$

Termien väliin voidaan asettaa yhtäsuuruusmerkki (merkkejä), jolloin saadaan kaava (kaavoja). Oikea merkintätapa on seuraavanlainen:

$$\int_0^3 x^2\,dx = \mathop{\Big/}_{0}^{3} \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}3^3 = 9.$$

Huomautus 4. Kaavojen ”ketjuttamisesta” puhutaan seuraavassa luvussa. Tässä yhteydessä pitää kuitenkin mainita että sekä ekvivalenssimerkki $\Leftrightarrow$ että implikaatiomerkki $\Rightarrow$ ja ekvivalenssimerkki $\Leftrightarrow$ käsitetään matemaattisin merkinnöin laajennetun Suomen kielen merkinnöiksi, eikä logiikan symboleiksi. Seuraavassa luvussa käsitellään vastaavia logiikan merkintöjä.

On huomattava, että merkintä $\Leftrightarrow$ voidaan periaatteessa aina korvata sanonnalla ”jos ja vain jos” ja merkintä $\Rightarrow$ sanonnalla ”jos ..., niin ...”.

Esimerkki 9. Merkintä $3x=6 \Leftrightarrow x=2$ voidaan lukea ”$3x$ on 6 jos ja vain jos x on 2. Merkintä $x=5 \Rightarrow x^2=25$ voidaan lukea ”jos $x=5$, niin $x^2=25$”. Viimeisin kaava on myös loogisesti tosi tavanomaisen tulkinnan mukaan.

1.6.4 Yhdistetyt kaavat ja kvanttorit

Edellisessä luvussa käsiteltiin ekvivalenssimerkin, implikaatiomerkin ja yhtäsuuruusmerkin käyttöä. On kuitenkin huomattava, että edellisen luvun mukaiset ekvivalenssit ja implikaatiot ovat lyhennysmerkintöjä matemaattisin termein varustetusta Suomen kielestä.

Formaalin logiikan kielessä on myös mahdollista yhdistää atomikaavoja toisiinsa ja perustaa niille tulkinta. Atomikaavojen yhdistäminen monimutkaisemmiksi kaavoiksi tapahtuu loogisten *konnektiivien* kautta. Lisäksi voidaan käyttää *kvanttoreita*, joita käsitellään jäljempänä.

Yleisimmät *konnektiivit* ovat

- $\wedge$ (konjunktio eli looginen ja)
- $\vee$ (disjunktio eli looginen tai)
- $\neg$ (negaatio eli looginen ei)
- $\rightarrow$ (implikaatio eli looginen seuraus)
- $\leftrightarrow$ (ekvivalenssi)

Nämä merkinnät käsitetään tässä kurssissa intuitiivisesti. Jos P ja Q ovat kaavoja, merkitsee esimerkiksi $P \wedge Q$ yhdistettyä kaavaa ”P ja Q”, kun taas $\neg P$ tarkoittaa P:lle vastakkaista kaavaa, joka on tosi tarkalleen silloin kun P on epätosi. Kaava $P \rightarrow Q$ voidaan lukea ”jos P niin Q”.

Konnektiivien tulkinta voidaan esittää perinteisesti seuraavan ns. totuustaulukon avulla, jossa 0 edustaa totuusarvoa ”epätosi” ja 1 arvoa ”tosi”

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Yllä olevassa taulukossa esimerkiksi neljäs sarake tulkitaan siten, että kaava $P \wedge Q$ on tosi vain ja ainoastaan silloin kun sekä P että Q ovat molemmat tosia.

On huomattava, että merkintää $\Rightarrow$ käytetään osoittamaan loogista seurausta aivan kuten konnektiivia $\rightarrow$, mutta tällä kurssilla $\rightarrow$ on varattu muodollisten loogisten väittämien yhdistämiseen, kun taas merkintää $\Rightarrow$ käytetään osana matemaattisesti varustettua suomen kieltä.

Esimerkki 10.

$$a = b \Rightarrow a + 1 = b + 1$$

on suomen kielen lause, jossa kerrotaan että yhtälöstä $a = b$ seuraa loogisesti yhtälö $a + 1 = b + 1$. Sen sijaan $a + b \rightarrow a + 1 = b + 1$ on logiikan kaava, johon ei välttämättä katsota sisältyvän luonnollisen kielen elementtejä.

Esimerkki 11. Aiemmassa luvussa on esitetty kaavoja, jossa on peräkkäisiä yhtäsuuruusmerkkejä kirjoitettuna muotoon $A = B = C = D$. Tämänlainen kaava ei kuitenkaan ole muodollisesti oikein. Sen sijaan kaava $(A = B) \wedge (B = C) \wedge (C = D)$ on muodollisesti oikein ja tämän looginen tulkinta on sama kuin aiemmin mainitun, syntaksin puolesta virheellisesti kirjoitetun kaavan $A = B = C = D$ tulkinta.

Logiikan ja matematiikan merkinnöissä käytetään yleensä kahdentyypisiä kvanttoreita, ns. *universaalikvanttoria* $\forall$ ja *eksistentiaalikvanttoria* $\exists$. Näiden merkitys tulkinnan kannalta on se, että universaalikvanttori väittää jotain olevan totta *kaikille* alkioille ja eksistenttiaalikvanttori väittää että on olemassa alkio jolle jokin väite on tosi.

Kvanttorit tulkitaan siten, että $(\forall x)P(x)$ tarkoittaa ”kaikille x:ille pätee $P(x)$ ja $(\exists x)P(x)$ ”on olemassa x jolle pätee $P(x)$”.

Esimerkki 12. Kvanttorissa esiintyvä kaava $(\forall x)(x \geq 0)$ tulkitaan väittämäksi, jonka mukaan kaikille x:n arvoille on voimassa $x \geq 0$

Esimerkki 13. Kaava $(\exists x)(x^2 = 2)$ tulkitaan väittämäksi, jonka mukaan on olemassa sellainen alkio x, että $x^2 = 2$.

Esimerkki 14. Kaava $(\exists y)(\forall x)(y \leq x)$ tulkitaan väittämäksi, jonka mukaan on olemassa sellainen y, että kaikki muita arvoja kohtaan $y \leq x$. Tämän väittämän totuusarvo riippuu siitä

1.7 Joukko-opin peruskäsitteet

Käsite *joukko* on yksi matematiikan tärkeimmistä. Matemaattisia teorioita esitettäessä predikaattilogiikan avulla tulee aina valita tarvittavat predikaatti- ja funktiosymbolit, joilla teorian objekteista voidaan puhua. Osoittautuu, että lähestulkoon kaikki matematiikka voidaan rakentaa joukko-opin varaan, jolloin siis periaatteessa riittää esittää joukko-oppi aksiomatisoituna teoriana ja sopia, että muut matemaattiset käsitteet ovat lyhennysmerkintöjä joukko-opin merkinnöistä.

Äärellisen tai numeroituvan äärettömän joukon merkitsemiseen käytetään aaltosulkeita: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4\}$ tai $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$. Joukkoon kuulumisesta käytetään merkintää $\in$ ja päinvastaisesta merkintää $\notin$. Esimerkiksi $2 \in A$, mutta $2 \notin B$. *Tyhjästä joukosta*, johon ei kuulu yhtään alkiota, käytetään merkintää $\emptyset$. Tätä merkintää ei tule sekoittaa kreikkalaisen aakkoston ϕ-kirjaimeen. Tavallisimmat joukkojen väliset operaatiot ovat

- Unioni eli yhdiste. Esimerkiksi $A \cup B = \{1,2,3,4\}$
- Intersektio eli leikkaus. Esimerkiksi $A \cap B = \{3\}$
- Differenssi eli erotus. Esimerkiksi $A \setminus B = \{1,2\}$.

Tämän kurssin tavoitteiden kannalta ei ole mielekästä esittää aksiomaattista perustaa joukko-opille, joten tyydytään sen sijaan intuitiiviseen käsitykseen.

Joukko *koostuu mistä hyvänsä olioista, mutta on voitava tarkoin määritellä ainakin periaatteessa, kuuluuko jokin olio joukkoon vai ei. Olioita, joista joukko koostuu, kutsutaan alkioiksi.*

Joukon merkinnässä alkioiden järjestyksellä ei ole väliä. Täten siis $\{2,3,1\}$ on sama joukko kuin $\{1,2,3\}$. Joukko ei myöskään sisällä samaa alkiota kahteen kertaan, joten on sovittu, että esimerkiksi myös merkintä $\{1,1,2,3\}$ tarkoittaa joukkoa $\{1,2,3\}$.

Joskus myös ääretön joukko määritellään "esittelemällä" sen alkiot. Näin voidaan tehdä, mikäli on olemassa jokin *induktiivinen sääntö*, joka määrittää kaikki alkiot.

Esimerkki 15. Luonnollisilla luvuilla tarkoitetaan joukkoa $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$.

Käsitetteen joukko kuvailussa on oleellista, että voidaan aina määrittää kuuluuko jokin alkio joukkoon vai ei. Tähän liittyvät matemaattiset merkinnät esitellään seuraavassa määritelmässä.

Määritelmä 2. $\in$ on ns. kaksipaikkainen relaatiosymboli. Merkintä $x \in A$ tulkitaan siten, että alkio x kuuluu joukkoon A. Merkintä $x \notin A$ on lyhennys merkinnästä $\neg(x \in A)$ ja siis tarkoittaa, että alkio x ei kuulu joukkoon A.

Määritelmä 3. Merkintä $\{x \in A \mid \phi(x)\}$ tarkoittaa joukkoa, joka sisältää sellaiset joukon A alkiot x, jotka toteuttavat pystyviivan oikealla puolella olevan kaavan $\phi(x)$.

Esimerkki 16. $B = \{x \in A \mid x \leq 2\}$ tarkoittaa joukkoa, joka sisältää joukkoon A kuuluvat alkiot x, jotka ovat suuruudeltaan korkeintaan 2. Jos esimerkiksi $A = \{1,2,3,4\}$ on $B = \{1,2\}$.

Joukko-opin tärkein anti matematiikalle on mahdollisuus laskea käsitteet yksinkertaiselle pohjalle. Yleensä matemaattisen teorian esittämisessä käytetään funktio- ja relaatiosymboleja, mutta periaatteessa lähes kaikki matematiikka on mahdollista rakentaa käyttämällä vain yhtä relaatiota ($\in$) ja sopimalla pidemmälle menevät määritelmät lyhennysmerkinnöiksi.

Edellä kuvailtua joukko-oppia kutsutaan *naiiviksi joukko-opiksi*, sillä joukkoja ei määritellä eksaktilla tavalla ja sisältymisrelaatio $\in$ käsitetään intuitiivisesti. 1800-luvun loppupuolella havaittiin, että naiivi joukko-oppi voi johtaa loogisiin ongelmiin, erityisesti mikäli joukkoon kuulumisen ehto merkinnässä $\{x \in A \mid \phi(x)\}$ on rajoittamaton.

Tämän vuoksi saksalainen matemaatikko Gottlob Frege (1848–1925) joutui kohtaamaan henkilökohtaiseksi tragediaksi luonnehdittavan vastoinkäymisen laatiessaan järkälemäistä teostaan Grundgesetze der Arithmetik (Aritmetiikan perusteet), osa 1 (1893), osa 2 (1903). Frege pyrki teoksessaan osoittamaan, että kaikki matematiikka on palautettavissa joukko-oppiin, mutta oli sallinut joukkoon kuulumisehdon ilman rajoituksia. Tuolloin nuori brittiläinen matemaatikko ja loogikko Bertrand Russell (1872–1970) huomautti Fregelle, että hänen käsitteistönsä sisältää ristiriidan: Kun määritellään joukko

$$A = \{X \mid X \notin X\},$$

siis A on niiden joukkojen joukko, jotka *eivät kuulu itseensä*, voidaan tehdä seuraava johtopäätös: $A \in A \Leftrightarrow A \notin A$. Tämä ristiriita tunnetaan nimellä *Russelin paradoksi* ja siitä on esitetty sittemmin lukuisia variantteja. Frege ehti lisätä painossa olevaan osaan 2 lisäsivut, jossa hän käsitteli Russelin havaintoa tragediana joka romahdutti hänen elämäntyönsä ennen kuin se ehdittiin edes kokonaisuudessaan julkaista.

Melko pian Russelin paradoksin jälkeen myös joukko-opille laadittiin aksiomaattinen lähestymistapa, joka nykyisin tunnetaan nimellä Zermelon –Fraenkelin -joukko-oppi. Tästä aksiomatisoidusta versiosta ei toistaiseksi ole löydetty ristiriitoja.

Esimerkki 17. Huomioi että tyhjä joukko $\emptyset$ on eri asia, kuin joukko $\{\emptyset\}$, jonka ainoa *alkio* on tyhjä joukko. Edelleen eri käsite on joukko $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, joka sisältää kaksi edellistä joukkoa. Näistä esitetyistä joukoista voidaan rakentaa yhä uusia muodostamalla joukko, jonka jäseninä ovat kaikki entiset joukot. Listan seuraava jäsen on täten $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ ja yleinen sääntö on seuraava: $N_0 = \emptyset$, $N_i = N_{i-1} \cup \{N_{i-1}\}$.

Jos joukko-opille on luotu kestävä perusta, on sen nojalla yllämainittujen joukkojen olemassaolo ja uusien muodostaminen edellämainitulla tavalla ongelmatonta. Tällöin voidaan sopia, että joukosta $\emptyset$ käytetään merkintää 0, joukosta $\{\emptyset\}$ merkintää 1, joukosta $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ merkintää 2 jne. Tällä tavoin on mahdollista esittää luonnolliset luvut pelkästään joukko-opin käsitteiden avulla.

Lähes kaikki matemaattiset kaavat, lauseet ja todistukset voidaan kirjoittaa ja niiden merkitys voidaan periaatteessa ymmärtää ainoastaan joukko-opin merkintöjä käyttäen. Monet oleelliset käsitteet kuten funktio *määritellään* joukkojen avulla ja kurssilla Insinöörimatematiikka 2 nähdään miten tämä tapahtuu.

Voidaan oikeutetusti kysyä miksi sitten joukot ja joukko-oppi eivät näytä olevan erityisen tärkeitä matematiikan opiskelussa eivätkä edes kovinkaan usein matemaatikkojen työskentelyssä. Vastaus on varsin yksinkertainen: pelkästään joukko-opin merkintöjä ja käsitteitä käyttäen kaavoista, todistuksista ja käsitteistä tulisi varsin pitkiä ja työläitä ymmärtää, minkä vuoksi tarvitaan selkeämpiä merkintöjä ja käsitteitä.

Samankaltainen ilmiö nähdään myös ohjelmoinnissa: nykyisin enää aniharva ohjelmoi konekielellä (assembly), koska korkeamman tason ohjelmointikielillä työ on selkeämpää ja usein tarkoituksenmukaisempaa. Kuitenkin korkean tason ohjelmointikielten toiminta voidaan selittää konekielen avulla. Matematiikassa voidaan joukko-opin käsitteiden ajatella vastaavan konekieltä ja tavallisesti esiintyvien käsitteiden vastaavan korkean tason ohjelmointikieltä. Joukko-opin peruskäsitteet kuitenkin esiintyvät matematiikan merkinnöissä useasti, minkä vuoksi niihin pitää perehtyä.

1.8 Tärkeimmät lukujoukot

Joukko on käsitteenä tarkoin määritelty, kun sen alkiot tunnetaan. Tällöin ei siis ole tarpeen perehtyä alkioiden sisäiseen rakenteeseen tai olemukseen, ei siis tarvitse tietää minkälaisia ”olioita” joukon alkiot ovat, riittää tietää sisältyykö jokin alkio joukkoon vai ei.

Perinteisesti matematiikassa *lukujoukot* ovat olleet erityisasemassa jo historiallisista syistä. Tämän kurssin kannalta tärkeimmät lukujoukot luetellaan seuraavassa määritelmässä.

Määritelmä 4.

- Luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,
- Kokonaisluvut $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
- Rationaaliluvut $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$,
- Reaalilukujen joukkoa merkitään symbolilla $\mathbb{R}$, ja
- Kompleksilukujen joukkoa symbolilla $\mathbb{C}$.

Tällä kurssilla pidetään joukkoja $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{Z}$ intuitiivisesti selvinä käsitteinä ja tarkastellaan pikemminkin lukujoukkoja $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$. Kompleksilukujen joukkoa $\mathbb{C}$ käsitellään kurssin loppuosassa.

Määritelmien 3 ja 4 mukaan $\mathbb{Q}$ koostuu osamääristä $\frac{a}{b}$, joissa a ja b ovat kokonaislukuja, ja $b \neq 0$. Samaa osamäärää voidaan esittää monella tavalla: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \ldots$, mutta kuten aiemmin on mainittu, alkion useat mahdolliset esitykset eivät muuta joukkoa: $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}\} = \{\frac{1}{2}\}$. Rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ voidaan katsoa kokonaislukujen joukon $\mathbb{Z}$ laajennukseksi, sillä jokainen kokonaisluku a voidaan esittää osamääränä $a = \frac{a}{1}$.

Jokaisella reaaliluvulla on olemassa desimaaliesitys, joka useimmissa tapauksissa on päättymätön. Sanotaan, että desimaaliesitys on päättyvä, jos kaikki desimaalit ovat nollia jostakin rajasta lähtien, jolloin voidaan tietenkin jättää loputon nollien jono merkitsemättä.

Esimerkki 18. Rationaaliluvulla $\frac{1}{3}$ on päättymätön desimaaliesitys $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$, sen sijaan rationaaliluvulla $\frac{1}{5}$ on päättyvä esitys $\frac{1}{5} = 0,2000\ldots$, mikä yleensä merkitään $\frac{1}{5} = 0,2$.

Päättyvä desimaaliesitys (toisin sanoen sellainen desimaaliesitys, jossa kaikki desimaalit ovat nollia jostakin kohdasta lähtien) voi olla vain rationaaliluvuilla. Mikäli rationaaliluvun desimaaliesitys ei ole päättyvä, se on jaksollinen. Toisaalta taas rationaaliluvun desimaaliesitys ei välttämättä ole yksikäsitteinen: Esimerkiksi kokonaisluvulla 1 on sekä päättyvä desimaaliesitys $1,000\ldots$ että päättymätön jaksollinen desimaaliesitys $0,999\ldots$. Itse asiassa jokaista päättyvää desimaaliesitystä kohti voidaan löytää samaa lukua esittävä päättymätön esitys samoin kuin esimerkiksi luvulle $0,5000\ldots = 0,4999\ldots$.

Tavanomaisia merkintöjä ovat myös seuraavat:

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (suljettu väli)
- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (avoin väli)
- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (puoliavoin väli, analogisesti $(a,b]$)
- $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ (suljettu puolisuora, analogisesti $(-\infty,a]$)
- $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ (avoin puolisuora, analogisesti $(-\infty,a)$)

1.9 Summa- ja tulomerkinnät

Summa- ja tulomerkinnät Σ ja Π ja niiden käsittelysäännöt saavat lukiokursseissa yleensä vain vähän huomiota. Näitä merkintöjä käytetään kuitenkin hyvin yleisesti ja siksi niihin on syytä perehtyä.

Summa voidaan merkitä lyhyemmin

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

ja tulo

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

Tässä luvussa käsitellään jatkossa ainoastaan summamerkinnän manipulointia, koska vastaavat käsittelysäännöt voidaan saada helposti myös tulolle.

Summausindeksin i valinta ei ole tärkeä, yhtä hyvin yllä oleva summa voitaisiin kirjoittaa muodossa $\sum_{k=1}^{n} a_k$, tärkeää on ainoastaan, että summausindeksiä ei voi vahingossa sekoittaa johonkin toiseen lausekkeissa esiintyvään muuttujaan tai vakioon. Erityisesti kompleksilukujen yhteydessä (Insinöörimatematiikka 2) pitää karttaa i:n käyttöä indeksinä. Summamerkinnän ideana on, että summausindeksi juoksee läpi esiintyvien lukujen $a_1, \ldots, a_n$ indeksoinnin luvusta 1 lukuun n, ja tämä ilmaistaan summamerkin $\sum$ ala- ja yläpuolella olevilla rajoitteilla ”$i = 1$” ja ”n”.

Summamerkintää käyttäen voidaan vaikkapa n:n ensimmäisen kokonaisluvun summa kirjoittaa lyhyempään muotoon:

$$1 + 2 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i.$$

On kuitenkin huomattava, että kyseessä on vain merkintätapa, eikä se anna mitään keinoa näyttää toteen, että

$$1+2+\ldots+n=\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2},$$

mikä kyllä pitää paikkansa. Tällä kurssilla esitetään menetelmiä, joilla yllä oleva yhtälö voidaan todistaa oikeaksi.

Summamerkinnän käsittelyyn liittyvät säännöt saadaan suoraan yleisistä summia koskevista säännöistä sekä summamerkinnän määrittelystä. Esimerkiksi tavanomainen osittelulain soveltaminen

$$c(a_1+a_2+\ldots+a_n)=ca_1+ca_2+\ldots+ca_n$$

voidaan summamerkintää käyttäen kirjoittaa muotoon

$$c\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{i=1}^{n} ca_i.$$

Samoin summattavien jäsentely

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)+(b_1+b_2+\ldots+b_n)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n)$$

saa muodon

$$\sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{i=1}^{n} b_i=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i).$$

Edelleen, summamerkintä voidaan aina "katkaista": jos $1<m<n$, voidaan tietysti kirjoittaa

$$a_1+\ldots+a_n=a_1+\ldots+a_m+a_{m+1}+\ldots+a_n,$$

mikä voidaan edelleen lyhentää muotoon

$$\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{i=1}^{m} a_i+\sum_{i=m+1}^{n} a_i.$$

Summausindeksin muutos on suora seuraus merkintätavasta:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i,\quad \sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1},\quad \text{ja}\quad \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$$

tarkoittavat samaa asiaa. Yleisenä sääntönä pätee, että summausmerkinnän ylä- ja alarajaa voidaan nostaa yhdellä, jos summalausekkeessa esiintyvästä indeksistä vähennetään yksi. Samoin summausmerkinnän rajoja voidaan laskea yhdellä, jos summalausekkeen indeksiin lisätään ykkönen. Tarvittaessa summamerkinnän rajan nostoa tai laskua voidaan tietenkin soveltaa useamman kerran peräkkäin.

Jos merkinnässä $\sum_{i=m}^{n}$ on $n<m$, sovitaan, että kyse on tyhjästä summasta, jonka arvo on nolla. Vastaavasti tyhjän tulon arvoksi sovitaan 1.

1.10 Binomikaava

Tässä osassa esitettävää binomikaavaa varten määritellään ns. *binomikertoimet* ja tarkastellaan joitakin niiden ominaisuuksia. Johdantona binomikaavaan voidaan tarkastella binomin $a+b$ potensseja

$$(a+b)^1=a+b,\quad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\quad (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,\quad \text{jne.}$$

Edellisissä esimerkeissä $(a+b)^n$ on summalauseke, jossa esiintyvät termit $C_{n,i}a^{n-i}b^i$ ja jokaisessa termissä $C_{n,i}$ on jokin tietty kerroin. Newtonin binomikaava selvittää kertoimien $C_{n,i}$ muodon.

Määritelmä 5. Kertomafunktio ei-negatiivisille kokonaisluvuille määritellään seuraavasti: $0! = 1$ ja kun $n \geq 1$, on $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Kertomafunktiolla on ilmeinen kombinatorinen (yhdistelmäopillinen) tulkinta: $n!$ ilmaisee kuinka monta erilaista järjestettyä jonoa voidaan muodostaa luvuista $1, 2, \ldots, n$.

Määritelmä 6. Olkoon $0 \leq n \leq m$. Binomikerroin $\binom{m}{n}$ määritellään

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Esimerkki 19.

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0! \cdot (m-0)!} = \frac{m!}{m!} = 1, \quad \binom{m}{1} = \frac{m!}{1! \cdot (m-1)!} = \frac{m \cdot (m-1)!}{(m-1)!} = m,$$

$$\binom{m}{2} = \frac{m!}{2 \cdot (m-2)!} = \frac{m(m-1) \cdot (m-2)!}{2 \cdot (m-2)!} = \frac{m(m-1)}{2}.$$

Lause 1. *Jos* $1 \leq n \leq m-1$, *niin* $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$

Todistus. Tässä todistuksessa esiintyy ainoastaan yhtäsuuruuksia, jotka on perusteltavissa määritelmillä tai (reaali)lukujen perusominaisuuksilla:

$$\begin{aligned}
&\binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} \\
&= \frac{(m-1)!}{n!(m-1-n)!} + \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-1-(n-1))!} \\
&= \frac{(m-1)!(m-n)}{n!(m-n)!} + \frac{(m-1)!n}{n!(m-n)!} \\
&= \frac{(m-1)!(m-n+n)}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}.
\end{aligned}$$

Taustatietoa

Blaise Pascal (1623–1662) oli ranskalainen matemaatikko, fyysikko ja filosofi, jonka katsotaan perustaneen todennäköisyyslaskennan. Hän tutki myös projektiivista geometriaa. Pascalin mukaan on nimetty paineen yksikkö ja ohjelmointikieli.

(kuva: Wikimedia Commons)

Huomautus 5. Lauseen 12 mukaisesti binomikertoimet muodostavat ns. *Pascalin kolmion*, jonka kukin alkio askemalla yläoikealla ja ylävasemmalla olevat alkiot yhteen:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\ & & & & \cdots & & & & \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 1\ \ 1 \\ 1\ \ 2\ \ 1 \\ 1\ \ 3\ \ 3\ \ 1 \\ 1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1 \\ \cdots \end{array}$$

Binomikertoimen merkitys kombinatoriikassa on seuraava: $\binom{m}{n}$ ilmaisee niiden tapojen määrän, joilla m:n alkion joukosta voidaan valita n alkiota, kun valintajärjestykseen ei kiinnitetä huomiota. Tämä voidaan havaita oikeaksi seuraavasti: Olkoon $C(m,n)$ mainittu tapojen määrä. Koska valitut n alkiota voidaan järjestää jonoon $n!$ eri tavalla, on $n!C(m,n)$ niiden tapojen määrä, joilla voidaan m:n alkion joukosta valita n alkiota järjestys huomioon ottaen. Koska ensimmäinen alkio voidaan valita m:llä tavalla, toinen $m-1$:llä, jne., on tämä määrä $m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)$. Näin ollen

$$n!C(m,n) = m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1),$$

mistä jakolaskulla ja määritelmiä soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned} C(m,n) &= \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!} \\ &= \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)\cdot(m-n)!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}. \end{aligned}$$

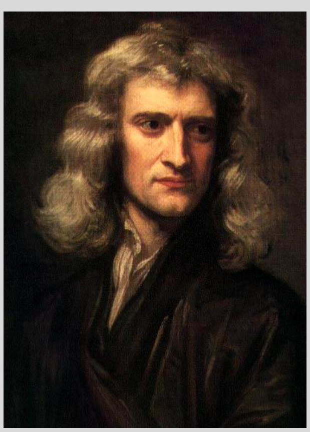
Esimerkki 20. Joukosta $\{1,2,3,\ldots,39\}$ voidaan valita 7 numeroa $\binom{39}{7} = \frac{39!}{7!\cdot 32!} = 15380937$ eri tavalla.

Lause 2 (Newtonin binomikaava).

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i,$$

kun n on positiivinen kokonaisluku.

Taustatietoa



Sir Isaac Newton (1643–1728) oli englantilainen matemaatikko, fyysikko, filosofi ja alkemisti. Newton esitti mekaniikan perustavat liikelait sekä yleisen gravitaatiolain. Hän kehitti differentiaali- ja integraalilaskennan riippumatta Gottfried Leibnizin samanaikaisesta työstä. Newtonin katsotaan kuuluvan Gaussin ja Arkhimedeen ohella maailmanhistorian merkittävimpien matemaatikkojen joukkoon.

(kuva: Wikimedia Commons)

Luvun oleellisia asioita:

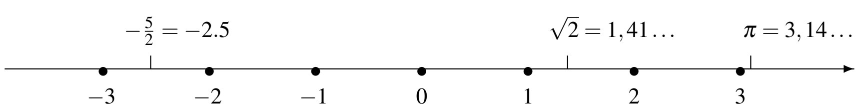
- Matematiikka ei ole luonnontiede

- Matematiikan perustana toimivat aksioomat, lauseita eli teorian väittämiä johdetaan päättelemällä.
- Deduktio on ainoa matematiikassa käytettävä päättelyn muoto.
- Logiikan merkinnät
- Newtonin binomikaava.

Luku 2
Reaalilukujen perusominaisuudet

Insinöörimatematiikan kurssikokonaisuuden kannalta keskeisimmät matematiikan osa-alueet ovat differentiaali- ja integraalilaskenta, ja niiden perustana toimii reaalilukujen teoria. Kuten kaikki matematiikka, myös reaalilukujen teoria on esitettävissä aksiomaattis-deduktiivisessa muodossa. Tässä luvussa esitellään reaalilukujen aksiomatiikka lyhyesti lähinnä siitä syystä, että täten voidaan vastata joihinkin perustavaa laatua oleviin kysymyksiin, kuten “mikä on luvallinen operaatio”?, Miksi negatiivinen kertaa negatiivinen on positiivinen”? ja “miksi epäyhtälömerkin suunta kääntyy kun kerrotaan negatiivisella luvulla”? Lisäksi löytynee vastauksia kysymyksiin, joita lukiokurssilla ei luultavasti ole edes esitetty. Tällä kurssikokonaisuudella ei kuitenkaan ole tarkoitus ryhtyä johtamaan reaalilukujen teoriaa aksioomista asti, sillä sellainen esitys veisi kohtuuttomasti aikaa ja muita resursseja.

Intuitio reaaliluvuista rakentuu sille pohjalle, että reaaliluvut $\mathbb{R}$ täydentävät rationaalilukujen joukkoa muodostamalla lukusuorasta yhtenäisen yksiulotteisen jatkumon (kuva 2.1). Kokonaisluvut muodostavat selvästi toisistaan eroteltavissa olevan, *diskreetin* joukon, mutta reaalilukujen ajatellaan täyttävän suoran aukottomasti siten että yhtä ideaalista geometrista pistettä vastaisi tasan tarkkaan yksi reaaliluku. Tästä juontaa yleinen tapa kutsua reaalilukuja *pisteiksi.*



Kuva 2.1 Lukujen ajatellaan sijoittuvan lukusuoralle suuruusjärjestyksessä vasemmalta oikealle. Kokonaisluvut muodostavat tasavälisen pisteistön, kun taas rationaaliluvut levittäytyvät lukusuoralle tiheänä joukkona. Aukoton lukusuorasta tulee kuitenkin vasta, kun reaaliluvut tuodaan mukaan.

2.1 Rationaalilukujen epätäydellisyys

Palautetaan mieleen rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Samaistamalla murtoluvut $\frac{a}{1}$ kokonaisluvun a kanssa voidaan katsoa, että $\mathbb{Q}$ sisältää kaikki kokonaisluvut, mutta näiden lisäksi myös paljon muita lukuja. Kokonaislukujen graafisessa esityksessä lukusuoraan asetetaan pisteet ykkösen välein, mutta rationaalilukujen esitys on mutkikkaampi, sillä rationaaliluvut täyttävät lukusuoran tiheästi. Tämä voidaan nähdä siitä, että kahden rationaaliluvun $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ välissä on aina näiden keskiarvo

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2} = \frac{ad + bc}{2bd}.$$

Tämän vuoksi ei ole olemassa esimerkiksi pienintä positiivista rationaalilukua, sillä rationaaliluvusta q päästään aina pienempään lukuun jakamalla $q = \frac{a}{b}$ kahtia: $0 < \frac{q}{2} < q$. Toisaalta taas olipa $q = \frac{a}{b}$ miten pieni positiivinen rationaaliluku hyvänsä, saadaan tästä kokonaisluvulla kertomalla miten suuri luku hyvänsä: $Nb \cdot q = Nb \cdot \frac{a}{b} = Na \geq N$.

Rationaalilukujen hyviin ominaisuuksiin kuuluu äärellinen esitys: jokainen rationaaliluku voidaan esittää nimittäjän ja osoittajan avulla, jotka kumpikin puolestaan voidaan esittää äärellisenä numerojonona, vaikkapa kymmenjärjestelmässä. Rationaaliluvut ovat kuitenkin ominaisuuksiltaan rajoitettuja: ne eivät täytä lukusuoraa aukottomasti.

Esimerkki 21. (Pythagoras) Todistetaan, että yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua rationaalilukujen joukossa $\mathbb{Q}$. Tehdään vastaoletus, jonka mukaan olisi sellainen supistetussa muodossa oleva rationaaliluku $\frac{m}{n}$, että $(\frac{m}{n})^2 = 2$. Tästä seuraa että $m^2 = 2n^2$, ts. kokonaisluvun m neliö on parillinen. Tällöin myös m on parillinen, sillä parittomien lukujen neliöt ovat parittomia. Koska m on parillinen, voidaan kirjoittaa $m = 2m_1$ ($m_1 \in \mathbb{Z}$) ja sijoittamalla tämä yhtälöön $m^2 = 2n^2$ saadaan $4m_1^2 = 2n^2$, ts. $2m_1^2 = n^2$. Samoin kuin edellä, voidaan tästä päätellä, että n on parillinen, siis $n = 2n_1$. Tällöin siis m ja n ovat jaollisia luvulla 2, mikä on vastoin oletusta, jonka mukaan $\frac{m}{n}$ oli supistetussa muodossa. Tämän ristiriidan vuoksi vastaoletus todetaan vääräksi.

Lukuja jotka eivät ole rationaalisia, sanotaan *irrationaaliluvuiksi*, joten edellisen esimerkin sanoma voidaan pukea muotoon: $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku. Reaalilukujen joukossa yhtälöllä $x^2 = 2$ on jopa kaksi ratkaisua, ja positiivisesta ratkaisusta käytetään tavalliseen tapaan merkintää $\sqrt{2}$. Voidaan kuitenkin perustellusti kysyä, miksi tällainen reaaliluku $\sqrt{2}$ on olemassa tai miksi vaikkapa luvut $\sqrt[n]{a}$ ovat olemassa positiivisille kokonaisluvuille a. Jotta tähän kysymykseen olisi edes toivoa saada vastaus, tulee tietysti löytää vastaus paljon perustavampaa laatua olevaan kysymykseen: *mitä reaaliluvut ovat*?

Edellisessä luvussa todettiin, että ainakin Eukleideen päivistä asti matemaattiset teoriat on esitetty aksiomaattis-deduktiivisessa muodossa, jossa peruskäsitteet ja niiden suhteet määritellään aksioomina. Peruskäsitteiden päälle voidaan rakentaa uusia käsitteitä ja suhteita määrittelemällä.

Periaatteessa reaalilukujen teoria olisi mahdollista perustaa joukko-oppiin, jonka päälle määriteltäisiin uusia operaatioita siten että saataisiin aikaan luonnollisten lukujen $\mathbb{N}$ teoria. Tätä olisi puolestaan mahdollista laajentaa uusia käsitteitä määrittelemällä kokonaislukujen $\mathbb{Z}$ teoriaksi. Laajennus kokonaisluvuista $\mathbb{Z}$ rationaalilukuihin $\mathbb{Q}$ saattaa vaikuttaa loogisesti haastavalta, mutta matemaattisten rakenteiden kannalta kyseessä on kuitenkin hyvin samankaltainen tilanne kuin siirtymässä joukosta $\mathbb{N}$ joukkoon $\mathbb{Z}$: Siinä saadaan jokaiselle kokonaisluvulle vasta-alkio yhteenlaskun suhteen, ja laajennuksessa joukosta $\mathbb{Z}$ joukkoon $\mathbb{Q}$ saadaan jokaiselle nollasta poikkeavalle luvulle käänteisalkio kertolaskun suhteen.

Viimeisin askel, laajentaminen rationaaliluvuista $\mathbb{Q}$ reaalilukujen joukkoon $\mathbb{R}$ onnistuu niinikään joukko-opillisilla konstruktioilla. Näistä tunnetuimpia ovat *Cauchyn jonot* ja *Dedekindin leikkaukset*. Kumpaa hyvänsä käyttäen voidaan rationaalilukujen $\mathbb{Q}$ päälle rakentaa reaalilukujen kunta $\mathbb{R}$, ja yksi historiallisesti huomionarvoinen seikka on se, että nk. yhteismitattomien suureiden teoria, joka sai alkunsa jo Eudoksos Knidoslaisen (410/408 eaa – 355/347 eaa) töistä, on hyvin samankaltainen kuin Dedekindin (1831–1916) konstruktio. Täten voidaan sanoa, että jo muinaiset kreikkalaiset tunsivat reaalilukujen teorian ainakin jossain määrin. Heidän käsitteensä olivat kuitenkin rajoittuneet positiivisiin lukuihin, eikä teoria tiettävästi tullut antiikin aikoina erityisen tunnetuksi. Platonin kerrotaan myöhemmällä iällään harmitelleen sitä että yhteismitattomien suureiden teoria on jäänyt liian suppean piirin tietoisuuteen.

Edellämainittu konstruktio joukko-opista reaalilukuihin asti on kuitenkin varsin työläs toteuttaa ja vaatii paljon aikaa tarkistaa kaikkien yksityiskohtien johdonmukaisuus ja oikeellisuus. Siksi näin ei yleensä menetellä edes matematiikan pääainekursseilla, vaan useimmiten reaaliluvut määritellään peruskäsitteinä, joiden väliset suhteet aksiomatisoidaan niin kutsuttuina reaalilukujen aksioomina. Näin reaaliluvut luodaan ikään kuin "tyhjästä"antamalla peruskäsitteet ja niitä hallinnoivat aksioomat.

On kuitenkin huomattava, että mikäli noudatettaisiin aiemmin esitettyä konstruktioprosessia, jossa askel kerrallaan joukko-opista siirryttäisiin lopuksi reaalilukuihin, ei pikapuoliin esitettävillä reaalilukujen aksioomilla olisikaan mitään aksiooman statusta, vaan nämä olisivat loogisesti johdettavia väittämiä alemman tason peruskäsitteistä ja aksioomista. On osoittautunut, että kaikki esitetyt prosessit reaalilukujen konstruoimiseksi ovat johtaneet samaan järjestelmään, joka seuraavassa esitetään. Siksi reaalilukujen aksiomaattinen esittämien ei kuitenkaan ole ”tyhjästä” luomista vaan pikemminkin vastaa sitä, että suuri osa käsitteen kehityshistoriasta jätetään yksinkertaisesti huomiotta ja lähdetään tasolta, joka on aiemmin saavutettu loogisesti ja joka nyt korotetaan aksioomaattiseen asemaan lähinnä juuri siksi, ettei tarvitsisi käydä läpi pitkää matemaattista kehityshistoriaa. Tästä joudutaan maksamaan se hinta, että peruskäsitteiden ja aksioomien määrä on suurempi kuin alemman tason käsitteisiin nojautuessa.

2.2 Reaalilukujen aksiomatiikka

Reaaliluvut määritellään joukkona $\mathbb{R}$, jossa on kaksi kaksipaikkaista operaatiota $+$ ja $\cdot$, sekä kaksi erityistä alkiota $0 \in \mathbb{R}$ ja $1 \in \mathbb{R}$ siten, että seuraavat aksioomaryhmät toteutuvat: A) Kunta-aksioomat, B) Järjestysaksioomat ja C) Täydellisyysaksiooma

A) Kunta-aksioomat

1. Kaikille reaaliluvuille a, b ja c pätee $a+(b+c)=(a+b)+c$ ja $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$.
2. Jokaiselle reaaliluvulle a pätee $0+a=a$ ja $1\cdot a=a$.
3. Jokaista reaalilukua a kohti on olemassa a:n *vastaluku* $-a$, joka toteuttaa $a+(-a)=0$ ja jokaista nollasta eroavaa reaalilukua a kohti on olemassa käänteisluku a^{-1}, joka toteuttaa $a\cdot a^{-1}=1$.
4. Kaikille reaaliluvuille a ja b pätee $a+b=b+a$ ja $a\cdot b=b\cdot a$.
5. kaikille reaaliluvuille a, b, ja c pätee $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

Edellämainitut aksioomat kertovat, että reaaliluvut muodostavat matematiikassa *kunnaksi* kutsutun algebrallisen järjestelmän, jossa on kaksi laskutoimitusta ($+$ ja $\cdot$), ja neutraalialkio 0 toimituksen $+$ (yhteenlasku) suhteen, sekä neutraalialkio 1 toimituksen $\cdot$ (kertolasku) suhteen, tämän kertoo aksiooma 2. Aksiooma 1 on aiemmin mainittu osittelulaki sekä yhteen- että kertolaskun suhteen, ja aksiooma 3 mahdollistaa sekä vähennys- että jakolaskun määritelmän. Aksiooma 4 on tuttu vaihdannaislaki ja 5 osittelulaki.

Kunta-aksioomat ovat reaalilukujen algebralliset pelisäännöt: “ mitä saa tehdä ja mitä ei” reaaliluvuilla, perustuu yksinomaan näihin aksioomiin ja niistä johdettuihin ominaisuuksiin.

Huomautus 6. Aksioomista seuraa suoraviivaisesti monia ominaisuuksia, kuten esimerkiksi distributiivilain “vasen” muoto $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$.

Määritelmä 7. Vähennyslasku määritellään vastaluvun lisäämisenä: $a-b=a+(-b)$. Samoin jakolasku määritellään käänteisluvulla kertomisena: $a/b=a\cdot b^{-1}$, jos $b\neq 0$.

Esimerkki 22. Huomaa, että reaalilukujen algebran tunnettua sääntöä, jonka mukaan nollalla kertominen tuottaa aina nollan, *ei ole sisällytetty* edellämainittuihin aksioomiin. Tämä ei ole tarpeen, sillä näistä aksioomista seuraa loogisesti kyseinen väittämä.

Todistus. Ensinnäkin $0=0+0$ kunta-aksiooman 2 perusteella, joten $a\cdot 0=a\cdot(0+0)=a\cdot 0+a\cdot 0$ kunta-aksiooman 5 perusteella. Edelleen kunta-aksiooman 3 perusteella reaaliluvulla $a\cdot 0$ on vastaluku $-a\cdot 0$, joka lisäämällä yhtälön kumpaankin puoleen saadaan $a\cdot 0+(-a\cdot 0)=(a\cdot 0+a\cdot 0)+(-a\cdot 0)$. Soveltamalla kunta-aksioomia 3 ja 1 saadaan tämä sievenemään muotoon $0=a\cdot 0$.

On olemassa hyvinkin erilaisia kuntia, siis algebrallisia rakenteita, jotka toteuttavat kunta-aksioomat, mutta niiden perusrakenne on nykyisin hyvin tunnettu. Muun muuassa rationaaliluvut $\mathbb{Q}$ muodostavat tällaisen järjestelmän. Vastaavat äärelliset rakenteet muodostavat tärkeän teoreettisen osan tiedonsiirtoteknikan virheitä korjaaville koodeille.

Reaaliluvut on myös järjestetty joukko, mikä tarkoittaa sitä että ne toteuttavat seuraavat aksioomat:

B) Järjestysaksioomat: On olemassa osajoukko $\mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{R}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

1. Jokaista reaalilukua a kohti pätee tarkalleen yksi vaihtoehdoista $a\in\mathbb{R}_+$, $a=0$ tai $-a\in\mathbb{R}_+$.
2. Jos $a,b\in\mathbb{R}_+$, niin $a+b$, $a\cdot b\in\mathbb{R}_+$.

Intuitiivinen vastine joukolle $\mathbb{R}_+$ on positiivilukujen joukko, joka on suljettu kerto- ja yhteenlaskun suhteen. Aksioomaryhmää kutsutaan järjestysaksioomiksi, koska sen avulla voidaan määritellä reaalilukujen suuruusjärjestys:

Määritelmä 8. Suurempi kuin -relaatio $a > b$ määritellään seuraavasti: $a > b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}_+$.

Huomautus 7. Relaatiot $a \geq b$, $a \leq b$ ja $a < b$ voidaan määritellä hyvin ilmeisellä analogisella tavalla.

Huomautus 8. Aksiomatiikkaan perustuen voidaan aika helposti näyttää toteen, että $(-1)a = -a$, siis minkä tahansa alkion a vastaluku $-a$ saadaan kertomalla yksikköalkion 1 vasta-alkiolla -1 (harjoitustehtävä).

Huomautus 9. Aksioomista seuraa myös melko suoraviivaisesti että $1 \in \mathbb{R}_+$, siis $1 > 0$, kuin myös että $(-1)(-1) = 1$.

Huomautus 10. Aksioomista seuraa myös loogisesti seuraava tulos, jonka mukaan epäyhtälömerkin suunta käännetään, mikäli kertoja on negatiivinen: Jos $x < y$ ja $z < 0$, niin $xz > yz$.

Edelläolevasta määritelmästä ja järjestysaksioomista seuraa tavanomaiset epäyhtälöiden käsittelysäännöt, mm.

- Summa ei pienene jos summattavia ei pienennetä. Symbolein tämä voidaan merkitä seuraavasti: Jos $a \leq c$ ja $b \leq d$, niin
$$a + b \leq c + d.$$
Vastaava sääntö voidaan kirjoittaa myös tapauksessa, jossa summattavia ei suurenneta.
- Positiivisten lukujen tulo ei pienene jos tekijöitä ei pienennetä: Jos $0 \leq a \leq c$ ja $0 \leq b \leq d$, niin
$$ab \leq cd.$$
Yllä olevia sääntöjä sovellettaessa sanotaan, että a:ta on *arvioitu ylöspäin* c:ksi ja b:tä d:ksi. Säännöt yleistyvät suoraviivaisesti myös tapaukseen, jossa summattavia tai tulon tekijöitä on enemmän kuin kaksi.
- Positiivisten lukujen osamäärä ei pienene, jos osoittajaa ei pienennetä ja nimittäjää ei *suurenneta*: Jos $0 \leq a \leq c$ ja $b \geq d > 0$, niin
$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}.$$
Vastaava sääntö voidaan kirjoittaa myös tapaukselle, jossa osoittajaa pienennetään ja nimittäjää suurennetaan.

Määritelmä 9. Reaalilukujen joukossa määritellään *itseisarvo* seuraavasti:
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0. \\ -x & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

On melko helppoa todeta, että itseisarvo toteuttaa seuraavat ehdot:

1. $|x| \geq 0$.
2. $|xy| = |x|\,|y|$.
3. $-|x| \leq x \leq |x|$
4. Jos $-|y| \leq x \leq |y|$, niin $|x| \leq |y|$.
5. $|x + y| \leq |x| + |y|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
6. $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

Epäyhtälöä (5) kutsutaan *kolmioepäyhtälöksi* ja se seuraa suhteellisen helposti yllämainituista ominausuuksista, mutta on joka tapauksessa hyvä painaa mieleen jo tässä vaiheessa. Itseisarvon käsitteen avulla voidaan reaalilukujen joukkoon määritellä geometria, joka yksinkertaisesti perustuu etäisyyden määritelmään.

Epäyhtälö (6) seuraa loogisesti kolmioepäyhtälöstä ja sitä kutsutaan joskus *kolmioepäyhtälön vasemmaksi puoleksi*.

Määritelmä 10 (Metriikka). Kahden reaaliluvun välinen etäisyys $d(x,y)$ määritellään seuraavasti: $d(x,y) = |x-y|$

Seuraava lause on helppo todentaa oikeaksi:

Lause 3. *Kaikille reaaliluvuille x, y ja z pätee*

- $d(x,y) \geq 0$ *ja* $d(x,y) = 0$ *vain jos* $x = y$.
- $d(x,y) = d(y,x)$.
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Viimeisintä epäyhtälöä kutsutaan niinikään kolmioepäyhtälöksi. Tämän nimityksen varsinainen merkitys paljastuu vasta vähintään kaksiulotteisia rakenteita tarkastaellessa.

Seuraava lause kertoo, että sekä summa että tulo ovat yhteensopivia reaalilukujen metriikan suhteen siinä mielessä, että mikäli yhteenlaskettavia (tai tekijöitä) muutetaan vain vähän, niin myös summa (tai tulo) muuttuu vain vähän. Lauseessa siis oletetaan, että $a \approx c$ ja $b \approx d$.

Lause 4. *Oletetaan, että luvut a, b, c ja d ovat itseisarvoltaan pienempiä kuin* $M > 0$. *Tällöin sekä* $d(a+b, c+d)$ *että* $d(ab, cd)$ *saadaan miten pieniksi hyvänsä, kunhan* $d(a,c)$ *ja* $d(b,d)$ *valitaan riittävän pieniksi.*

Todistus. Summaa koskeva väittämä seuraa arviosta

$$d(a+b,c+d) = |a+b-(c+d)| = |a-c+b-d| \leq |a-c| + |b-d| = d(a,c) + d(b,d)$$

ja tuloa koskeva arvioista

$$\begin{aligned} d(ab,cd) &= |ab-cd| = |ab-ad+ad-cd| = |a(b-d)+(a-c)d| \leq |a|\,|b-d| + |a-c|\,|d| \\ &= |a|\,d(b,d) + |d|\,d(a,c) \leq M(d(b,d) + d(a,c)). \end{aligned}$$

Esimerkki 23.

$$d(x^2,9) = \left|x^2-9\right| = |(x+3)(x-3)| = |x+3|\,d(x,3).$$

Jos x on niin lähellä lukua 3 että $d(x.3) < 1$, on silloin $2 < x < 4$ ja siksi $|x+3| < 4+3 = 7$. Tällöin siis $d(x^2,9) < 7d(x,3)$.

Tämä merkitsee sitä että jos x on lähellä lukua 3 (etäisyys $d(x,3)$ on pieni), niin silloin x^2 on lähellä lukua 9, eli etäisyys $d(x^2,9)$ on pieni.

On syytä huomioida, että edellämainitut kunta- ja järjestysaksioomat pätevät myös rationaaliluvuille $\mathbb{Q}$. Rationaaliluvut eivät kuitenkaan toteuta viimeisintä, niin sanottua täydellisyysaksioomaa. Tämän esittämistä varten määritellään seuraavat käsitteet.

Määritelmä 11. Reaalilukujoukko A on *ylhäältä rajoitettu*, jos on olemassa sellainen luku M, että $x \leq M$ pätee kaikille $x \in A$. Lukua M kutsutaan joukon M *ylärajaksi*

Määritelmä 12. Joukon A pienintä ylärajaa S merkitään $S = \sup A$ ja kutsutaan *supremumiksi*.

Lause 5. $S = \sup A \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to x \leq S) \wedge (\forall \varepsilon)(\varepsilon > 0 \to (\exists x \in A)(x > S - \varepsilon))$

Huomaa, että jos M on joukon A yläraja, niin myös mikä hyvänsä lukua M suurempi luku $M_1 > M$ on yläraja.

Huomautus 11. Lause 5 on luvun $S = \sup A$ luonnehdinta. Se ilmaisee, että ensinnäkin jokainen A:n alkio on korkeintaan S:n suuruinen (siis S on jokin yläraja) Toiseksi, jos ylärajasta S vähennetään mikä hyvänsä positiiviluku ε, niin $S - \varepsilon$ *ei ole* joukon A yläraja ja löytyy $x \in A$, joka ylittää luvun $S - \varepsilon$. Näin ollen S on ylärajoista pienin.

C) Täydellisyysaksiooma: Jokaisella epätyhjällä, ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on *pienin yläraja*.

Kysymykseen reaalilukujen olemuksesta on siis vastattu esitetyllä aksiomaattisella menetelmällä: reaaliluvut ovat joukko, jossa on määritelty yhteen- ja kertolasku ja alkiot 0 ja 1 jotka toteuttavat reaalilukujen Kunta-, järjestys- ja täydellisyysaksioomat.

Huomautus 12. Jos reaalilukujoukossa A on *suurin* alkio $M = \max A$, on samalla myös $M = \sup A$. Kaikissa reaalilukujoukoissa ei kuitenkaan ole suurinta (eikä pienintä) alkiota. Jos esimerkiksi $A = (0,1)$, ei A:lla ole maksimia eikä minimiä.

Täydellisyysaksiooman nojalla jokaisella epätyhjällä, ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on olemassa pienin yläraja. Pienimmän ylärajan olemassaolo on juuri se ominaisuus, joka täydentää rationaalilukujoukon aukottomaksi reaalilukujoukoksi.

Esimerkki 24. Esimerkin 21 perusteella joukolla $[\{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 1 \wedge q^2 \leq 2\}$ ei voi olla pienintä ylärajaa rationaalilukujen joukossa. Sen sijaan reaalilukujen joukossa sillä on pienin yläraja jota merkitään symbolilla $\sqrt{2}$.

Kääntämällä asetelma nurinpäin, siis tarkastelemalla joukkoa $-A = \{-a \mid a \in A\}$ joukon A sijaan voidaan pienimmän ylärajan sijaan puhua *suurimmasta alarajasta*. Muunnosta $A \to -A$ hyväksi käyttäen voidaan todeta, että täydellisyysaksiooma takaa suurimman alarajan olemassaolon, jos A on *alhaalta rajoitettu* epätyhjä reaalilukujoukko.

Määritelmä 13. Reaalilukujoukon A suurinta alarajaa kutsutaan nimellä *infimum* ja siitä käytetään merkintää $\inf A$.

Huomautus 13. Jos joukossa A on pienin alkio $\min A$, on $\min A = \inf A$.

Huomautus 14. Jos $A \subseteq B$ on epätyhjä sekä B ylhäältä rajoitettu, on myös B epätyhjä ja A ylhäältä rajoitettu sekä $\sup A \leq \sup B$. Analoginen tulos pätee infimumille: $\inf B \leq \inf A$.

2.3 Aksiomatiikan seurauksia

Reaaliluvuille pätee monia rationaaliluvuille tuttuja tuloksia, kuten esimerkiksi kahden eri reaaliluvun välissä a ja b on aina mm. näiden keskiarvo $\frac{1}{2}(a+b)$. Erityisesti ei ole olemassa pienintä positiivilukua, vaan mitä tahansa positiivilukua ε kohti voidaan löytää pienempi positiiviluku $\frac{\varepsilon}{2}$.

Myös rationaaliluvuille tuttu tulos on voimassa, mutta todistus pitää esittää toisella tavalla.

Lause 6 (Arkhimedeen aksiooma). *Jos M ja ε ovat positiivisia reaalilukuja, on olemassa sellainen kokonaisluku N, että $N\varepsilon > M$.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, jonka mukaan väitettyä lukua N ei ole olemassa, siis $n\varepsilon \leq M$ kaikille luonnollisille luvuille n. Tällöin siis joukko $A = \{n\varepsilon \mid n \in \mathbb{N}\}$ on ylhäältä rajoitettu. Joukko on A selvästi epätyhjä, joten sillä on täydellisyysaksiooman nojalla pienin yläraja $S = \sup A$. Koska ε oletettiin positiiviseksi ja S joukon A pienimmäksi ylärajaksi, ei $S - \varepsilon$ voi olla joukon A yläraja. Tämän vuoksi joukossa A on alkio $m\varepsilon$, joka ylittää luvun $S - \varepsilon$, siis

$$m\varepsilon > S - \varepsilon,$$

mikä on yhtäpitävä epäyhtälön

$$(m+1)\varepsilon > S$$

kanssa. Nyt kuitenkin $(m+1)\varepsilon \in A$, joten S ei olekaan joukon A yläraja. Ristiriidasta voidaan päätellä vastaoletus vääräksi. □

Huomautus 15. Lausetta 6 on alunperin kutsuttu Arkhimedeen aksioomaksi, sillä vastaava tulos Arkhimedeen (n. 287 – 212 eKr) käyttämänä geometrisessa yhteydessä käsitettiin aikanaan aksioomana. Nykymatematiikassa tällä tuloksella ei ole aksiooman statusta, vaan nimitys on ainoastaan historiallista perua.

Määritelmä 14. Luku $\varepsilon > 0$ on *infinitesimaali* (äärettömän pieni), jos

$$n\varepsilon = \underbrace{\varepsilon + \ldots + \varepsilon}_{n \text{ kpl}} \leq 1$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Lauseen 6 sanoma voidaan siis ilmoittaa siten, että reaalilukujen joukossa **ei ole** infinitesimaaleja. Juuri näin myös Arkhimedes asian mielsi aikakautensa käsitteiden valossa. Koska differentiaalilaskennan kehittäjät Newton ja Leibniz kaiketi tunsivat Arkhimeden työt varsin hyvin, on matematiikan historian kannalta vähintäänkin mielenkiintoista että rakensivat teoriansa nimenomaan infinitesimaalien varaan.

Reaalilukujen joukossa ei niinikään ole ääretöntä, vaan jokaista lukua $M \in \mathbb{R}$ kohti on olemassa suurempi luku, esimerkiksi $M + 1 > M + 0 = M$. Symboleja ∞ ja $-\infty$ käytetään tällä kurssikokonaisuudella vain raja-arvomerkintöjen yhteydessä, jolloin ne eivät viittaa aktuaaliseen (eli todella olemassa olevaan) äärettömyyteen, vaan toimivat vain merkintöinä, jotka viittaavat siihen, että muuttuja voidaan valita miten suureksi ($\to \infty$) tai miten pieneksi ($\to -\infty$) tahansa.

Seuraus 1. *Jos $a < b$, on välillä (a,b) rationaaliluku.*

Todistus. Tarkastellaan ensin tapausta $b \geq 0$ ja merkitään $d = b - a$. Lauseen 6 mukaan on olemassa sellainen kokonaisluku N, että $N \cdot 1 > \frac{1}{d}$, mikä merkitsee, että $d > \frac{1}{N}$. Lauseen 6 perusteella on myös olemassa sellainen kokonaisluku n, että $n \cdot 1 \geq Nb$. Olkoon M pienin tällaisista kokonaisluvuista, jolloin siis $M - 1 < Nb \leq M$. Tämä merkitsee sitä, että $\frac{M-1}{N} < b \leq \frac{M}{N}$. Lisäksi

$$\frac{M-1}{N} = \frac{M}{N} - \frac{1}{N} > b - d = b - (b-a) = a,$$

mikä osoittaa, että $\frac{M-1}{N}$ voidaan valita väitteessä mainituksi rationaaliluvuksi.

Jos $b < 0$, voidaan väittämä todistaa oikeaksi soveltamalla edellistä päättelyä väliin $(-b, -a)$. □

Seuraus 2. *Jos $x \in (a,b) = A$, on olemassa sellaiset rationaaliluvut q_1 ja q_2, että $x \in [q_1, q_2] \subseteq A$.*

Seuraus 3. *Jos* $\alpha \in \mathbb{R}$*, ja* $n \in \mathbb{N}$*, niin on olemassa sellainen rationaaliluku* $q = \frac{a}{b}$*, että* $|\alpha - q| < \frac{1}{n}$*.*

Todistus. Edellisen seurauksen mukaan reaalilukuvälillä $(\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n})$ on olemassa rationaaliluku q, siis $\alpha - \frac{1}{n} < q < \alpha + \frac{1}{n}$, mistä seuraa $-\frac{1}{n} < q - \alpha < \frac{1}{n}$. Viimeisin epäyhtälöketju merkitsee sitä, että $|q - \alpha| < \frac{1}{n}$. □

Huomautus 16. Edellinen seuraus ilmaisee sen, että minkä hyvänsä reaaliluvun α miten pienestä läheisyydestä tahansa voidaan aina löytää rationaaliluku. Toisin ilmaistuna: mitä hyvänsä reaalilukua voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti rationaaliluvuilla. Käyttämällä tietoa että $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ on mahdollista muokata edellisen lauseen todistusta sen toteennäyttämiseksi, että kaikilla reaalilukuväleillä on myös aina irrationaaliluku.

Luku 3
Yleisimmät reaalifunktiot

3.1 Terminologiaa

Määritelmä 15. Funktiota $f : A \to B$ sanotaan reaalifunktioksi, jos f on määritelty jossakin joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$ ja saa arvonsa jossakin joukossa $B \subseteq \mathbb{R}$. Jos $f(x) = y$, sanotaan, että x on y:n *alkukuva*, ja y on x:n *kuva*. Joukkoa A kutsuaan *lähtöjoukoksi* tai *määrittelyjoukoksi* ja joukkoa B *maalijoukoksi*.

Tässä yhteydessä ”funktio” ymmärretään lukiokurssin pohjalta esitettynä intuitiivisena käsitteenä. Funktio siis mielletään ikään kuin “operaationa”, joka siirtää x:n (alkukuva) kuvaksi $y = f(x)$.

Geometriasta kumpuavien syiden vuoksi reaalilukujen joukkoa $\mathbb{R}$ nimitetään myös *reaalisuoraksi* tai *reaaliakseliksi*, ja sen alkioita (siis reaalilukuja) *pisteiksi*,

Tässäkin intuituitiivisessa käsityksessä voidaan otta huomioon se, että funktiota ei välttämättä ole tarpeen tai voida määritellä koko tarkastatelujoukossa, joka lähtökohtaisesti saattaisi olla koko reaaliakseli $\mathbb{R}$. Samoin voidaan huomioida, että funktion arvot eivät kenties peitä koko reaalilukujen joukkoa, vaan ainoastaan osan siitä. On myös huomattava, että funktion käsitteeseen liittyy olennaisena osana sekä määrittelyjoukko että maalijoukko. Vaikka näitä ei aina eksplisiittisesti mainittaisi, ne sisältyvät silti olennaisena osana funktion käsitteeseen.

Näin ollen esimerkiksi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ käsitetään erilaisena funktiona kuin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$, missä ensimmäisen funktion maalijoukko on koko $\mathbb{R}$, mutta jälkimmäisen vain $\mathbb{R}_+$

Seuraavat määritelmät on syytä painaa mieleen, sillä ne tulevat esille myöhemmin kurssikokonaisuuden eri osissa.

Määritelmä 16. Olkoon $f : A \to B$ reaalifunktio

- Funktio on *injektiivinen*, jos $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- Funktio on *surjektiivinen*, jos $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$.
- Funktio on *bijektiivinen*, jos se on sekä injektiivinen että surjektiivinen.

Huomautus 17. Injektiivisyys esittää myös muodossa (mieti miksi!)

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Tätä kutsutaan ylläolevan esitystavan loogiseksi kontrapositioksi.

Määritelmä 17. Reaalifunktiolle $f : A \to B$ määritellään seuraavasti:

- Reaalifunktio on (aidosti) *kasvava*, jos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \qquad (f(x_1) < f(x_2))$.

- Reaalifunktio on (aidosti) *vähenevä*, jos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \qquad (f(x_1) > f(x_2))$.
- Reaalifunktio on (aidosti) *monotoninen*, jos se on joko (aidosti) kasvava tai (aidosti) vähenevä.

Määritelmä 18. Aidosti monotoninen reaalifunktio on injektiivinen.

Määritelmä 19. Olkoot $f : A \to B$ ja $g : B \to C$ (reaali)funktioita. Tällöin $g \circ f : A \to C$ on *yhdistetty funktio*, joka määritellään

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Tässä merkinnässä funktiota g kutsutaan *ulkofunktioksi* ja funktiota f *sisäfunktioksi*

Esimerkki 25. Jos $f(x) = -x^2$ ja $g(x) = e^x$, on

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)} = e^{-x^2}.$$

Määritelmä 20. Olkoon $f : A \to B$ (reaali)funktio. Jos on olemassa sellainen (reaali)funktio $g : B \to A$, että $(\forall x \in B)(f(g(x)) = x)$ ja $(\forall x \in A)(g(f(x)) = x)$, sanotaan että g on f:n *käänteisfunktio* ja merkitään $g = f^{-1}$.

Seuraava lause karakterisoi (luonnehtii) ne reaalifunktiot, joille käänteisfunktio on olemassa.

Lause 7. *Olkoon $f : A \to B$ (reaali)funktio.*

1. *Funktiolla $f : A \to B$ on olemassa käänteisfunktio $f^{-1} : B \to A$ tarkalleen silloin kun f on bijektiivinen.*
2. *Jos funktio on (aidosti) kasvava/vähenevä, niin myös sen käänteisfunktio on.*

3.2 Polynomi- ja rationaalifunktiot

Määritelmä 21 (Polynomifunktiot). Polynomifunktio $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritellään lausekkeella

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n,$$

missä $a_i \in \mathbb{R}$..

Huomautus 18. Erityisesti huomionarvoista polynomifunktioissa on se, että niiden määrittelyssä ei tarvita muuta kuin reaalilukujen ”sisäänrakennettuja” laskutoimituksia: yhteen- ja kertolasku. Kokonaislukupotenssiin korotushan on toistettua kertolaskua. Tästä seuraa muun muuassa se, että polynomin arvon laskeminen tietyllä muuttujan arvolla on varsin selkeää, mikäli muuttuja ja kertoimet on annettu jossain systemaattisessa muodossa rationaalilukuina tai niiden approksimaatioina. Tällöin on periaatteessa mahdollista laskea funktion arvo vaikkapa kynää ja paperia käyttäen, mutta nykyisin mielekäämpi tapa on ajatella, että funktion arvon (approksimatiiviseen) laskemiseen voidaan laatia tietokoneohjelma. Sellaisia on tietysti jo laadittu vaikka kuinka paljon, mutta tämän kurssin tavoitteiden kannalta on tärkeää hallita ne periaatteet, joiden pohjalta mainitut ohjelmat voitaisiin laatia.

Seuraava laajennus ei ole numeeriselta kannalta kovin paljon vaikeampi kuin polynomifunktiot, mutta korostaa sitä, että reaalifunktion ei välttämättä tarvitse olla määritelty koko reaaliakselilla.

Määritelmä 22. Rationaalifunktiot määritellään kahden polynomin osamääränä

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Rationaalifunktio ei ole määritelty sellaisille reaaliluvuille, joille $q(x) = 0$.

Esimerkki 26. Lauseke $p(x) = 1 + 2x + 3x^2$ määrittelee polynomifunktion, joka on määritelty koko reaalialkselilla $\mathbb{R}$. Lauseke $r(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ määrittelee rationaalifunktion, kun $x \neq 1$.

3.3 Eksponenttifunktiot

Tässä luvussa tarkastellaan miten eksponenttifunktio voidaan määritellä. Kiinnitetään ensiksi kantaluku $a \in \mathbb{R}_+$ ja määritellään jokaiselle $n \in \mathbb{N}$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ kpl}}.$$

Määritelmästä seuraa selvästi

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \quad \text{ja} \quad (a^m)^n = a^{mn} \tag{3.1}$$

aina kun m ja $n \in \mathbb{N}$. Määritelmää pyritään laajentamaan siten, että ominaisuudet (3.1) toteutuisivat myös laajennuksessa.

Näin toimien voidaan havaita, että

$$a = a^1 = a^{1+0} = a^1 \cdot a^0 = a \cdot a^0,$$

mistä seuraa että $a^0 = 1$, sillä $a \in \mathbb{R}_+$.

Eksponenttifunktion laajennus negatiivisille kokonaisluvuille voidaan niinikään tehdä vaatimalla että (3.1) toteutuu. Silloin nimittäin

$$1 = a^0 = a^{-n+n} = a^{-n}a^n,$$

josta

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} = \frac{1}{a^n}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi miten pitäisi määritellä $a^{\frac{1}{n}}$, kun $n \in \mathbb{N}$. Tätä varten otetaan käyttöön seuraava määritelmä.

Määritelmä 23. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Luku $\alpha > 0$ on luvun $a > 0$ n:s juuri, jos $\alpha^n = a$. Tällöin merkitään $\alpha = \sqrt[n]{a}$. Tapauksessa $n = 2$ juurta kutsutaan *neliöjuureksi* ja tapauksessa $n = 3$ *kuutiojuureksi*.

Huomautus 19. Otaksuma $a \in \mathbb{R}_+$ on tarpeen juuren olemassaolon takaamiseksi. Jos esimerkiksi $a = -1$, ei ole sellaista reaalilukua α, että $\alpha^2 = -1$. Tämä voidaan ilmaista myös sanomalla, että luvulla -1 ei ole reaalista neliöjuurta.

Esimerkki 27. Sekä $2^2 = (-2)^2 = 4$, mutta määritelmän mukaan neliö- ja muut juuret ovat positiiviisia lukuja, siis $\sqrt{4} = 2$.

Koska $(-2)^3 = -8$, olisi johdonmukaista määritellä $\sqrt[3]{-8} = -2$. Näin ei kuitenkaan tehdä tällä kurssilla, vaan juuren määritelmässä rajoittaudutaan positiivisiin juurrettaviin. Kurssin seuraavassa osassa esiteltävä kompleksilukujen käsite paljastaa, että juuren käsite voidaan myös parillisessa tapauksessa laajentaa negatiiviselle reaaliakselille ja mikä vielä tärkeämpää, että tällöin juurikäsitettä ei kannata tarkastella funktiona vaan pikemminkin näitä yleisemmän kattokäsitteen – relaatioden – valossa.

Huomautus 20. Vaikka $a > 0$, ei juuren $\sqrt[n]{a}$ olemassaolo silti ole mitenkään itsestäänselvää. Palauta mieleen Pythagoraan löytö, jonka mukaan rationaalilukujen joukossa ei ole merkinnällä $\sqrt{2}$ luonnehdittavaa lukua. Reaalilukujen joukossa sen sijaan juuren $\sqrt[n]{a}$ olemassaolo voidaan todistaa täydellisyysaksioomaan nojautuen.

Reaalisen juuren yksikäsitteisyyys on hyvin helppo todeta sen perusteella, että kun $n \in \mathbb{N}$, on funktio $f(x) = x^n$ kasvava positiivisella reaaliakselilla.

Ominaisuuksien (3.1) valossa pitäisi olla

$$a = a^{\frac{1}{n} \cdot n},$$

jolloin voidaan siis todeta, että $a^{\frac{1}{n}}$ pitää nimenomaan määritellä $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Koska jokainen rationaaliluku voidaan kirjoittaa muodossa $r = \frac{m}{n}$, missä $m \in \mathbb{Z}$ ja $n \in \mathbb{N}$, voidaan tämän jälkeen suoraviivaisesti määritellä

$$a^r = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Esimerkki 28. $4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8.$

Viimeisin vaihe eksponenttifunktion määrittelyjoukon laajentamisessa on ponnistaa määrittelyjoukosta $\mathbb{Q}$ määrittelyjoukkoon $\mathbb{R}$. Oletetaan tätä varten aluksi että $a > 1$. Aiemmin esitettyjen käsitteiden valossa laajennus on periaatteessa yksinkertaista: Jos $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, valitaan sellainen jono $r_1 \le r_2 \le r_3 \le \ldots$ rationaalilukuja, että $x = \sup\{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$ ja määritellään

$$a^x = \sup\{a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \ldots\}.$$

Tapaus $0 < a < 1$ voidaan palauttaa tapaukseen $a > 1$ yhtälön $(\frac{1}{a})^x = a^{-x}$ kautta.

Tämä määritelmä tarkoittaa käytännössä sitä, että mikäli irrationaalilukua x voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti rationaalilukujonon r_1, r_2, r_3, … avulla, saadaan vastaavasti arvolle a^x mielivaltaisen tarkkoja approksimaatioita reaalilukujonon a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, … avulla.

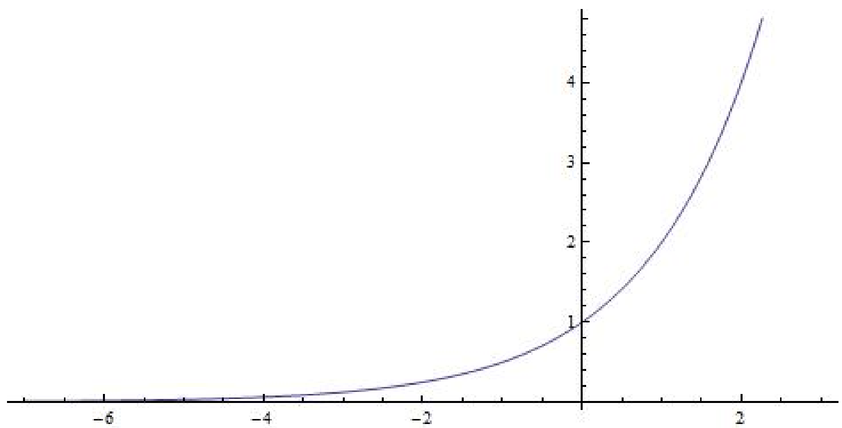
Tämä määrittely vaikuttaa hyvnkin johdonmukaiselta, mutta sisältää sisältää kuitenkin joitakin kyseenalaisia seikkoja. Näistä ensimmäinen on se, että irrationaalilukua x kohti lähestyviä rationaalilukujonoja on äärettömän monta, miksi siis a^x on aina sama riippumatta siitä mikä jono valitaan? Seuraava ongelma lienee tarkistaa että ominaisuudet (3.1) toteutuvat myös koko reaaliakselilla määritellylle a-kantaiselle eksponenttifunktiolle. Näitä ei kuitenkaan ryhdytä tarkistamaan tällä kurssilla, vaan esitetään seuraava lause ilman todistusta.

Lause 8. *Olkoon $a > 0$. Edellä kuvatulla menettelyllä voidaan määritellä eksponenttifunktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = a^x$ joka toteuttaa seuraavat ehdot:*

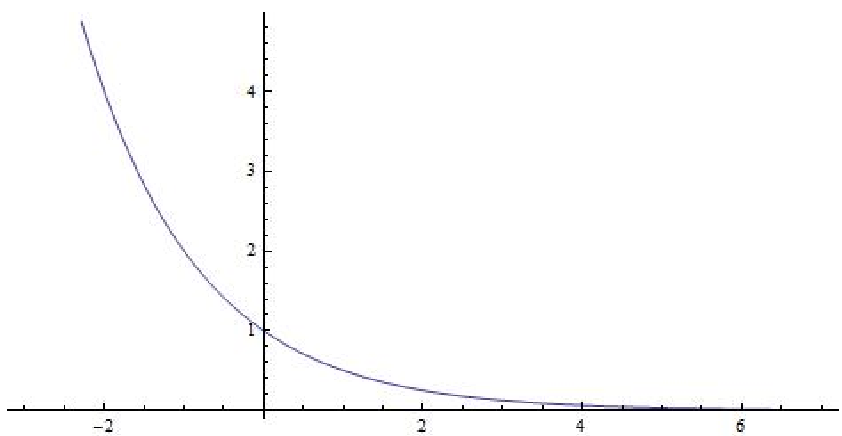
- $a^{x+y} = a^x a^y$
- *Jos $0 < a < 1$, on f aidosti vähenevä ja f:n arvot lähestyvät nollaa kun x kasvaa rajatta mutta kasvavat rajatta kun x pienenee rajatta*
- *Arvoilla $a > 1$ f on aidosti kasvava ja f:n arvot lähestyvät nollaa kun x pienenee rajatta ja f:n arvot kasvavat rajatta kun x kasvaa rajatta*

- *Molemmissa tapauksissa f on bijektio.*
- *Jos $b = a^c$, on $b^x = (a^c)^x = a^{cx}$*

Huomautus 21. Laskennaliselta kannalta erityisen huomionarvoinen on viimeisin kohta, joka kertoo sen, että mikäli tunnetaan menetelmä a-kantaisen eksponenttifunktion (liki)arvojen laskemiseksi sekä yhteys $b = a^c$, niin tästä saadaan menetelmä b-kantaisen eksponenttifunktion (liki)arvojen laskemiseksi.



Kuva 3.1 $y = 2^x$



Kuva 3.2 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

3.4 Logaritmifunktiot

Määritelmä 24. Olkoon $a > 0$. Tällöin a-kantainen logaritmifunktio $\log_a \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ määritellään a-kantaisen eksponenttifunktion käänteisfunktiona:

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

Huomautus 22. Määritelmästä seuraa, että $a^{\log_a y} = y$ aina kun $y \in \mathbb{R}$ ja $\log_a a^x = x$ aina kun $x \in \mathbb{R}$

Seuraavan lauseen väittämät seuraavat suoraan eksponenttifunktion ominaisuuksista.

Lause 9. *Logaritmifuntio toteuttaa seuraavat ehdot*

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a x^y = y \log_a x.$
- *Jos* $b = a^c$, *on* $b^x = (a^c)^x = a^{cx}$ *ja siis*
- $\log_b x = \frac{\log_a x}{c}$

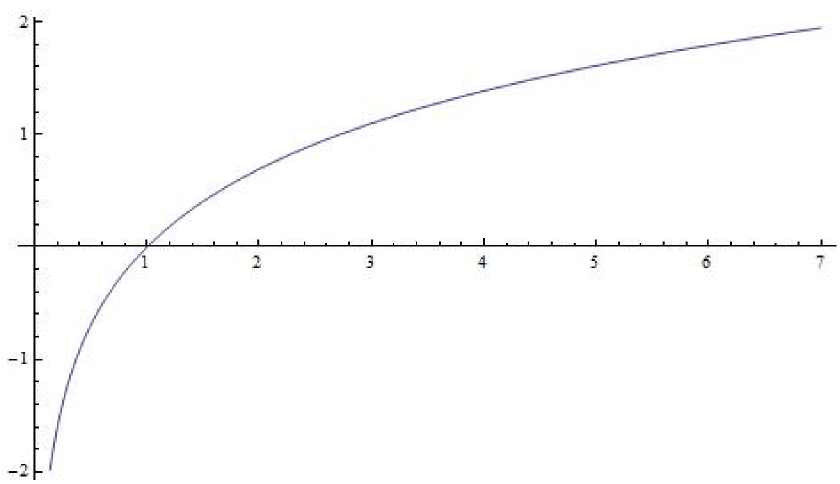
Huomautus 23. Laskennalliselta kannalta viimeisin kohta on hyvin merkittävä. Se kertoo, että jos a-kantaisen logaritmiin (liki)arvojen laskemiseksi on olemassa jokin menetelmä, niin silloin on myös menetelmä b-kantaisen logaritmin (liki)arvojen laskemiseksi.

On myös huomattava, että yhtälöstä $b = a^c$ seuraa $c = \log_a b$.

Määritelmä 25. Neperin luku $e = 2,71828182845904523536\ldots$ on irrationaaliluku jonka tarkempaan määritelmään pureudutaan vasta kurssin seuraavissa osissa.

Sekä e-kantaiselle eksponenttifunktiolle että e-kantaiselle logaritmille on kuitenkin olemassa vakiintunet merkinnät, e^x merkitään usein $\exp(x)$ ja $\log_e x$ yleensä $\ln x$. Kymmenkantaiselle logaritmille on myös olemassa melko vakiintunut merkintä $\log_{10} x = \lg x$

Huomautus 24. e–kantaista logaritmia kutsutaan nimellä *luonnollinen logaritmi*. Merkintöjen e^x ja $\exp(x)$ suhteesta on matemaattisessa kirjallisuudessa muitakin tulkintoja, mutta $\log_e x$ ja $\ln x$ käsitetään poikkeuksetta saman asian eri merkinnöiksi.



Kuva 3.3 $y = \ln x$

Esimerkki 29. Kuinka suureksi x pitää valita, että $2^x > 10^9$?

Koska eksponenttifunktio $f(x) = 2^x$ on aidosti kasvava ja $\log_2$ tämän käänteisfunktiona niinikään aidosti kasvava, voidaan epäyhtälöstä päätellä $\log_2(2^x) > \log_2(10^9)$, mikä voidaan kirjoittaa muotoon

$$x > 9\log_2(10) = 29.897\ldots.$$

3.5 Trigonometriset funktiot

Edelläkuvattujen lisäksi yksi varsin yleisesti esiintyvän reaalifunktiotyypin muodostavat *trigonometriset funktiot*. Trigonometriset funktiot voidaan määritellä täsmällisesti sarjaopin avulla, mutta tässä yhteydessä tyydytään intuitiivisempaan kuvailuun.

Kulman suuruus on perinteisesti esitetty jakamalla täysi ympyrä 360 asteeseen, jolloin puoliympyrän suuruudeksi saadaan 180° ja suoran kulman suuruudeksi 90°. Vaikka tämänkaltainen valinta juontaa juurensa viiden vuosituhannen takaisesta sumerilaisten lukujärjestelmästä, on valinta 360 täyden ympyrän mitaksi silti matemaattiselta kannalta mielivaltainen, vaikkakin hyvin vakiintunut.

Differentiaali- ja integraalilaskennan kannalta kulman suuruus tulee määritellä absoluuttisissa yksiköissä joille on annettu nimi *radiaani*, mutta joihin voidaan yhtä lailla viitata ilman mitään yksikköä, sillä kyseessä on suhdeluku.

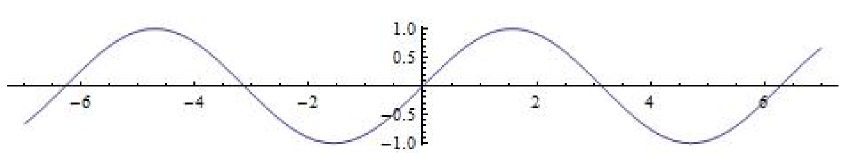
Määritelmä 26 (Kulman suuruus). Ympyräsektorin kulman suuruus on sektorin kaaren pituus jaettuna säteen pituudella. Tällöin kulma x (asteissa) voidaan muuntaa kulmaksi y (radiaaneissa) seuraavasti: $y = \frac{\pi}{180}x$. Suoran kulman suuruus on siis $\frac{\pi}{2}$, oikokulman π ja täyden ympyrän 2π.

Määritelmä 27 (Sini ja kosini). Kulman, joka kiertyy positiiviselta x-akselilta vastapäivään *kehäpiste* on origokeskisen yksikköympyrän ja kulman vasemman kyljen leikkauspiste. Tämän kulman *sini* on kehäpisteen y-koordinaatti ja *kosini* x-koordinaatti.

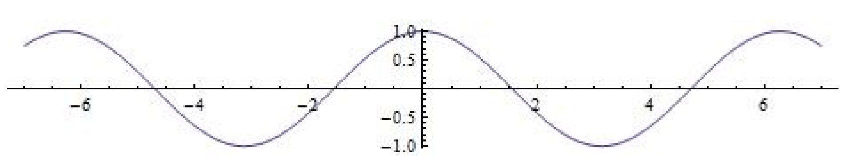
Käyttämällä moninkertaisia kierroksia sekä myötäpäivään kiertymistä voidaan sini ja kosini määritellä kaikille mahdollisille reaaliluvuille. Edelleen huomataan, että sini ja kosini voivat saada arvoja vain väliltä $[-1,1]$, mutta huomattavin ominaisuus on, että kumpikin funktio on *jaksollinen*:

$$\sin x = \sin(x+2\pi) \quad \text{ja} \quad \cos x = \cos(x+2\pi)$$

kaikille mahdollisille reaaliluvuille x. Trigonometriset funktiot toteuttavat lukuisia identiteettejä (yhtäsuuruuksia, jotka pätevät kaikille muuttujan arvoille) joita on listattu taulukoihin. Näistä tunnetuimpia ovat $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ja $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$. Myös identiteetti $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ on huomattava, sillä siitä ilmenee että kosini ja sini ovat itse asiassa koordinaatiston siirtoa vaille samat funktiot.



Kuva 3.4 $y = \sin x$



Kuva 3.5 $y = \cos x$

Määritelmästä nähdään helposti myös oikeaksi seuraava tulos.

Lause 10 (Sinin ja kosinin nollakohdat).

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$

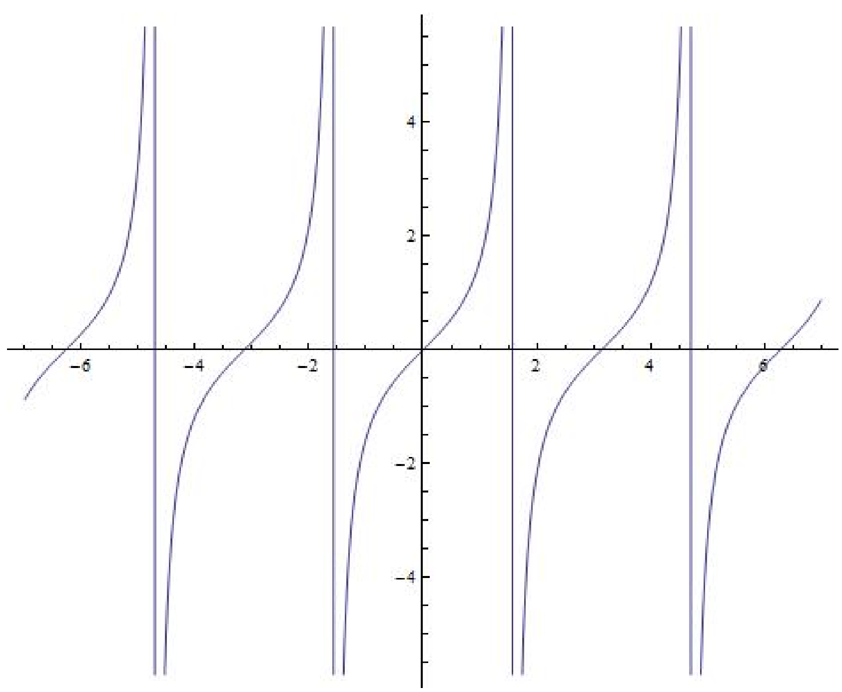
Funktiona $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sini ei ole surjektio, sillä se saa vain välillä $[-1,1]$ olevia arvoja. Sini ei myöskään ole injektio, sillä se on jaksollinen ja saa täten samoja arvoja 2π:n välein. Näin ollen sini ei ole bijektio eikä sillä siis ole käänteisfunktiota. Sopivasti lähtö- ja maalijoukkoa rajoittamalla sinistä saadaan aikaan bijektio, esimerkiksi

funktio $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ on bijektio, jonka käänteisfunktiota kutsutaan *arkussiniksi* ja merkitään $\arcsin x$ tai $\sin^{-1} x$.

Arkuskosini $\arccos : [0,\pi] \to [-1,1]$ määritellään analogisesti.

Tangentti voidaan määritellä kaavalla $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, jolloin saadaan kaikilla muilla reaaliarvoilla paitsi joukossa $\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ määritelty funktio. Osoittautuu, että tangentti on π-jaksollinen funktio, joka on kasvava välilä $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ja saa kaikki reaaliarvot tällä välillä.

Funktio $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ on bijektio ja sen käänteisfunktiota kutsutaan *arkustangentiksi*.



Kuva 3.6 $y = \tan x$

3.6 Trigonometristen funktioiden ominaisuuksia

Lause 11. *Sini ja kosini toteuttavat seuraavat väittämät:*

- $\sin(-t) = -\sin t$
- $\cos(-t) = \cos t$
- $\cos(t+\pi) = -\cos t$
- $\sin(t+\pi) = -\sin t$
- $|\sin x| \leq |x|$
- $\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$

Todistus. Kaksi ensimmäistä väitettä seuraa siitä, että muutettaessa kulman merkkiä kehäpiste peilautuu x-akselin suhteen. Näin ollen x-koordinaatti ($\cos t$) säilyy ja y-koordinaatti ($\sin t$) vaihtaa merkkiä. Kaksi seuraavaa väittämää johtuvat siitä, että puoliympyrän lisääminen kulmaan vastaa kehäpisteen peilaamista origon suhteen.

Edellämaintun perusteella väittämän $|\sin x| \leq |x|$ todistamiseksi riittää käsitellä tapausta $x \geq 0$. Lisäksi voidaan olettaa, että $x \leq 1$, koska joka tapauksessa $\sin x \leq 1$. Kulma $0x = 1 < \frac{\pi}{2}$, ja tämä väittämä perustellaan geometriseen intuitioon nojautuen: $\sin x$ vastaa matkaa kehäpisteeltä kohtisuoraan x-akselille, kun taas x vastaa matkaa kehäpisteeltä yksikköympyrän kaarta pitkin x-aksellille, joten $\sin x < x$.

Viimeisin väittämä on erikoistapaus trigonometrisista summat tuloiksi -kaavoista eikä sitä perustella tarkemmin.

Huomautus 25. Ylläolevan lauseen viimeisimmästä väittämästä on kuitenkin välittömiä seurauksia trigonometristen funktioiden ominaisuuksiin. Nyt nimittäin

$$\begin{aligned}|\sin x - \sin y| &= \left|2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right| \\ &\leq 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \cdot \leq 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x-y|,\end{aligned}$$

siis $d(\sin x, \sin y) \leq d(x,y)$. Samoin voidaan osoittaa, että $d(\cos x, \cos y) \leq d(x,y)$.

Määritelmä 28. Olkoon $I \subseteq \mathbb{R}$. Funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on *kutistava* joukossa I, jos $d(f(x), f(y)) \leq d(x,y)$ aina kun $x,\ y \in I$.

Kutistavuus tarkoittaa siis sitä, että kuvat $f(x)$ ja $f(y)$ ovat lähempänä toisiaan kuin alkukuvat x ja y. Yllämainitun perusteella sini ja kosini ovat kutistavia funktioita koko reaaliakselilla.

3.7 Reaalifunktioiden esitystapoja

Määritelmä 29.

- Reaalifunktion esittämistä lausekkeen avulla, esimerkiksi $f(x) = x^2$, sanotaan *eksplisiittimuodoksi*.
- *Implisiittimuodossa* funktio f ilmaistaan yhtälöiden $F(x,y) = 0$ ja $y = f(x)$. avulla. Esimerkiksi $xy - 1 = 0$ määrittelee implisiittisesti funktion, jolle pätee $y = f(x) = \frac{1}{x}$ kun $x \neq 0$.
- *Parametrimuodossa* reaalifunktio f määritellään kahden muun reaalifunktion $g : I \to \mathbb{R}$ ja $h : I \to \mathbb{R}$ määrittämän pisteistön $\{(g(t), h(t)) \mid t \in I\}$ avulla siten, että $x = g(t)$ ja $y = f(x) = h(t)$. Muuttujaa t kutsutaan *parametriksi*.

Esimerkki 30. Lauseke $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ määrittelee reaalifunktion välillä $[-1,1]$ *eksplisiittisesti*. Eksplisiittiselle määrittelylle tyypillistä on se, että se tarjoaa laskennallisesti suoraviivaisen tavan funktion (likimääräisen) arvon laskemiselle, olettaen että laskennalliset menetelmät tunnetaan osafunktioille, tässä tapauksessa neliöinnille $x \mapsto x^2$, vähennyslaskulle $x^2 \mapsto 1-x^2$ ja neliöjuuren laskemiselle.

Yhtälö $x^2 + y^2 = 1$ määrittelee saman funktion *impisiittisesti*. Jotta tästä määritelmästä saataisiin funktio, pitää rajoittaa esim. $y \geq 0$ ja myös x sopivalle välille, esim $x \in [-1,1]$.

Parametrimuoto implisiittimuotoiselle funktiolle $x^2 + y^2 = 1$ perustuu sinin ja kosinin määritelmään: Valitaan parametriksi kulma $t \in [0,\pi]$. Tällöin piste $(\cos t, \sin t)$ kuuluu yksikköympyrän yläpuolelle. Kun $t = 0$, kyseessä on piste $(1,0)$, ja kun $t = \pi$, saadaan piste $(-1,0)$. Kutakin parametrin arvoa $[0,\pi]$ vastaa yksikäsitteinen yksikköympyrän yläpuolen piste.

Huomautus 26. Parametrimuoto voidaan tulkita myös liikkeenä xy-tasossa: Parametri t tulkitaan ajaksi, jolloin ajanhetkellä $t \in [0,\pi]$ tarkasteltavan pisteen koordinaatit ovat $(\cos t, \sin t)$.

3.8 Rekursio

Esimerkki 31. Kun $n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$, voidaan kertomafunktio $n!$ määritellä rekursiivisesti määrittelemällä ensin $0! = 1$ (rekursion pohja) ja tämän jälkeen $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Huomautus 27. Edellinen määritelmä kattaa kaikki joukon $\mathbb{N}_0$ alkiot, koska $0!$ on määritelty, ja $(n+1)! = (n+1) \cdot !$ tulee määritellyksi rekursiivisesti pienemmän arvon $n!$ perusteella.

Tämä toteama että $n!$ on määritelty kaikille joukon $\mathbb{N}_0$ alkiolle, on puolestaan luonteeltaan rekursiivinen ja perustuu siihen, että joukko $\mathbb{N}_0$ voidaan itsessään määritellä joukkona, jossa on pienin alkio 0, ja muut saadaan tästä rekursiivisesti *seuraajafunktiolla*: $s(0)$, $s(s(0))$, $s(s(s(0)))$, ... Jotta näin saataisiin aikaan $\mathbb{N}_0$, pitää seuraajafunktiolle asettaa tiettyjä ehtoja (kts. Insinöörimatematiikka 1).

Huomautus 28. Kertomafunktion määritelmästä seuraa suoraan, että $n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! = \ldots = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, joten kertomafunktio voitaisiin määritellä myös $0! = 1$ ja

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i, \tag{3.2}$$

mutta määritelmä (3.2) ei ole rekursiivinen. Kertoma $n!$ ilmaisee niiden jonojen määrän, jotka voidaan muodostaa luvuista $\{1,2,\ldots,n\}$ valitsemalla yksi luku vain kerran.

Huomautus 29. Kertomafunktion rekursiivisessa määritelmässä suurempi arvo $(n+1)!$ määritellään vain yhden pienemmän arvon $n!$ perusteella, mutta näin ei välttämättä tarvitse olla.

Esimerkki 32. Fibonaccin luvut määritellään ehdoilla $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ (rekursion pohja) ja $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, kun $n > 0$. Näin ollen siis $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$, $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$, $F_4 = F_2 + F_1 = 2 + 1 = 3$, $F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$, $F_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8$, jne.

Huomautus 30. Edellisten esimerkkien rekursiossa suuremmuus määriteltiin joukon $\mathbb{N}_0$ perusteella. Joukko $\mathbb{N}_0$ on määriteltävissä hyvin yksinkertaisella rekursiolla, jossa kukin suurempi alkio $s(n)$ määritellään ainoastaan yhden pienemmän alkion n perusteella. Näin ei kuitenkaan tarvitse aina olla, vaan järjestysrelaatio voi olla myös monimutkaisempi.

Tämän osion lopuksi esitettävää binomikaavaa varten kerrataan kurssista Insinöörimatematiikka 1 ns. *binomikertoimet* ja tarkastellaan joitakin niiden ominaisuuksia. Johdantona binomikaavaan voidaan tarkastella binomin $a+b$ potensseja

$$(a+b)^1 = a+b, \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4, \quad \text{jne.}$$

Edellisissä esimerkeissä $(a+b)^n$ on summalauseke, jossa esiintyvät termit $C_{n,i}a^{n-i}b^i$ ja jokaisessa termissä $C_{n,i}$ on jokin tietty kerroin. Newtonin binomikaava selvittää kertoimien $C_{n,i}$ muodon.

Määritelmä 30. Olkoon $0 \le n \le m$. Binomikerroin $\binom{m}{n}$ määritellään

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Esimerkki 33.

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0! \cdot (m-0)!} = \frac{m!}{m!} = 1, \quad \binom{m}{1} = \frac{m!}{1! \cdot (m-1)!} = \frac{m \cdot (m-1)!}{(m-1)!} = m,$$

$$\binom{m}{2} = \frac{m!}{2 \cdot (m-2)!} = \frac{m(m-1) \cdot (m-2)!}{2 \cdot (m-2)!} = \frac{m(m-1)}{2}.$$

Lause 12. *Jos* $1 \le n \le m-1$, *niin* $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$

Todistus. Tässä todistuksessa esiintyy ainoastaan yhtäsuuruuksia, jotka on perusteltavissa määritelmillä tai (reaali)lukujen perusominaisuuksilla:

$$\begin{aligned}
&\binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} \\
&= \frac{(m-1)!}{n!(m-1-n)!} + \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-1-(n-1))!} \\
&= \frac{(m-1)!(m-n)}{n!(m-n)!} + \frac{(m-1)!n}{n!(m-n)!} \\
&= \frac{(m-1)!(m-n+n)}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \\
&= \binom{m}{n}.
\end{aligned}$$

Taustatietoa

Blaise Pascal (1623–1662) oli ranskalainen matemaatikko, fyysikko ja filosofi, jonka katsotaan perustaneen todennäköisyyslaskennan. Hän tutki myös projektiivista geometriaa. Pascalin mukaan on nimetty paineen yksikkö ja ohjelmointikieli.

(kuva: Wikimedia Commons)

Huomautus 31. Lauseen 12 mukaisesti binomikertoimet muodostavat ns. *Pascalin kolmion*, jonka kukin alkio askemalla yläoikealla ja ylävasemmalla olevat alkiot yhteen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \dots & & & &
\end{array}
=
\begin{array}{c}
1 \\
1\ 1 \\
1\ 2\ 1 \\
1\ 3\ 3\ 1 \\
1\ 4\ 6\ 4\ 1 \\
\dots
\end{array}$$

Binomikertoimen merkitys kombinatoriikassa (yhdistelmiä tutkiva matematiikan haara) on seuraava: $\binom{m}{n}$ ilmaiseen niiden tapojen määrän, joilla m:n alkion joukosta voidaan valita n alkiota, kun valintajärjestykseen ei kiinnitetä huomiota. Tämä voidaan havaita oikeaksi seuraavasti: Olkoon $C(m,n)$ mainittu tapojen määrä. Koska valitut n alkiota voidaan järjestää jonoon $n!$ eri tavalla, on $n!C(m,n)$ niiden tapojen määrä, joilla voidaan m:n alkion joukosta valita n alkiota järjestys huomioon ottaen. Koska ensimmäinen alkio voidaan valita m:llä tavalla, toinen $m-1$:llä, jne., on tämä määrä $m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)$. Näin ollen

$$n!C(m,n) = m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1),$$

mistä jakolaskulla ja määritelmiä soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned} C(m,n) &= \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!} \\ &= \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)\cdot(m-n)!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}. \end{aligned}$$

Esimerkki 34. Joukosta $\{1,2,3,\ldots,39\}$ voidaan valita 7 numeroa $\binom{39}{7} = \frac{39!}{7!\cdot 32!} = 15380937$ eri tavalla.

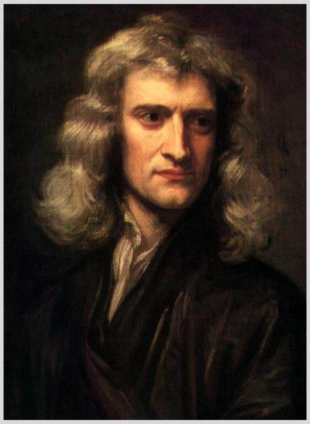
Lause 13 (Newtonin binomikaava).

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i,$$

kun n on positiivinen kokonaisluku.

Todistus. Todistus esitetään luennolla.

Taustatietoa



Sir Isaac Newton (1643–1728) oli englantilainen matemaatikko, fyysikko, filosofi ja alkemisti. Newton esitti mekaniikan perustavat liikelait sekä yleisen gravitaatiolain. Hän kehitti differentiaali- ja integraalilaskennan riippumatta Gottfried Leibnizin samanaikaisesta työstä. Newtonin katsotaan kuuluvan Gaussin ja Arkhimedeen ohella maailmanhistorian merkittävimpien matemaatikkojen joukkoon.

(kuva: Wikimedia Commons)

Luku 4
Kompleksiluvut

Lukualueiden laajentamista luonnollisten lukujen joukosta $\mathbb{N}$ laajempiin joukkoihin voidaan tarkastella monelta kannalta. Algebrallinen lähestymistapa kiinnittää huomiota polynomiyhtälöiden ratkeavuuteen, esimerkiksi yhtälöllä $x+2=1$ ei ole ratkaisua luonnollisten lukujen joukossa, mutta kokonaislukujen joukossa $\mathbb{Z}$ sillä on ratkaisu $x=-1$. Vastaavasti yhtälö $2x=1$ on kokonaislukujen joukossa ratkeamaton, mutta laajennettaessa kokonaislukujen joukkoa rationaalilukujen joukoksi $\mathbb{Q}$ saadaan yhtälölle ratkaisu $x=\frac{1}{2}$. Samoin yhtälö $x^2-2=0$ on rationaalilukujen joukossa ratkeamaton, mutta reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$ sillä on kaksikin ratkaisua, nimittäin $\sqrt{2}$ ja $-\sqrt{2}$.

Helposti huomataan, että reaaliluvutkaan eivät takaa polynomiyhtälön ratkeavuutta: esimerkiksi yhtälöllä $x^2+1=0$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{R}$. Tämän puutteen korvaamiseksi otetaan käyttöön *kompleksiluvut*.

4.1 Kompleksilukujen määritelmä ja peruslaskutoimitukset

Määritelmä 31. *Imaginaariyksikkö* i toteuttaa yhtälön $i^2=-1$. *Kompleksiluku* z on muotoa $z=x+yi=x+iy$ oleva lauseke, missä x ja $y\in\mathbb{R}$. Kompleksilukujen joukkoa merkitään symbolilla $\mathbb{C}$. Kompleksiluvut $z_1=x_1+y_1i$ ja $z_2=x_2+y_2i$ ovat yhtäsuuret tarkalleen silloin kun $x_1=x_2$ ja $y_1=y_2$.

Edellisen määritelmän mukaan kompleksiluku $x+yi$ voidaan käsittää reaalilukuparina (x,y). Koska jokainen reaaliluku voidaan kirjoittaa muotoon $x=x+0i$, voidaan reaaliluvut käsittää kompleksilukujen erikoistapauksiksi ja siis $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$

Huomautus 32. Koska imaginaariyksikkö toteuttaa yhtälön $i^2=-1$, voidaan periaatteessa merkitä $i=\sqrt{-1}$. Tällöin pitäisi kuitenkin olla $(-i)^2=(-i)(-i)=(-1\cdot i)(-1\cdot i)=(-1)^2i^2=i^2=-1$. Täten siis näyttää siltä, että myös $-i$ toteuttaa yhtälön $(-i)^2=-1$ eikä neliöjuuri $\sqrt{-1}$ olisi yksikäsitteinen. Tähän ongelmaan palataan myöhemmin.

Huomautus 33. Symbolia i käytetään toisinaan merkitsemään vaihtovirtaa, ja siksi erityisesti sähkötekniikan yhteydessä imaginaariyksiköstä käytetään i:n sijaan merkintää j.

Esimerkki 35. Yhtälöllä $x^2-2x+5=0$ ei ole reaalisia ratkaisuja, koska $x^2-2x+5=(x-1)^2+4\geq 4$ aina kun $x\in\mathbb{R}$. Sen sijaan yhtälöllä on kaksi kompleksista ratkaisua, jotka saadaan seuraavasti: $x^2-2x+5=0\Leftrightarrow(x-1)^2=-4\Leftrightarrow(x-1)^2=4i^2\Leftrightarrow x-1=\pm 2i\Leftrightarrow x=1\pm 2i$.

Määritelmä 32. Kompleksiluvun $z=x+yi$ *reaaliosa* määritellään $\mathrm{Re}(z)=x$ ja *imaginaariosa* $\mathrm{Im}(z)=y$.

Yhteenlasku kompleksiluvuilla on suoraviivainen: $(x_1+y_1i)+(x_2+y_2i)=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$, ja kertolaskua varten muistetaan, että $i^2=-1$. Tällöin

$$\begin{aligned}(x_1+y_1i)(x_2+y_2i) &= x_1x_2+x_1y_2i+y_1ix_2+y_1iy_2i\\ &= x_1x_2+y_1y_2i^2+x_1y_2i+y_1x_2i\\ &= (x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+y_1x_2)i.\end{aligned}$$

Vähennyslasku on yhteenlaskun kanssa analoginen, ja jakolaskun helpottamiseksi otetaan ensin käyttöön *liittoluvun* käsite.

Määritelmä 33. Kompleksiluvun $z=x+yi$ *liittoluku* (tunnetaan myös nimellä *kompleksikonjugaatti*) on $\overline{z}=x-yi$.

Lause 14. *Jos z_1 ja $z_2\in\mathbb{C}$, niin $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ ja $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.*

Todistus. Harjoitustehtävä.

Kompleksilukujen jakolaskussa kannattaa usein laventaa jakajan liittoluvulla:

$$\begin{aligned}\frac{x_1+y_1i}{x_2+y_2i} &= \frac{(x_1+y_1i)(x_2-y_2i)}{(x_2+y_2i)(x_2-y_2i)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+x_2y_1i-x_1y_2i}{x_2^2+y_2^2}\\ &= \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i.\end{aligned}$$

Kompleksiluvuilla on siis monia reaalilukujen kaltaisia ominaisuuksia: niille voidaan määritellä summa, erotus, tulo ja osamäärä, jotka vielä toteuttavat samankaltaisia sääntöjä kuin reaalilukujen vastaavat operaatiot. On esimerkiksi helppo tarkistaa, että kompleksiluvuille z_1, z_2 ja z_3 pätevät sekä *vaihdantalaki eli kommutatiivisuus* $z_1z_2=z_2z_1$ sekä *osittelulaki eli distributiivisuus* $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$. Lisäksi kompleksiluvuille pätee tulon nollasääntö eli $z_1z_2=0$ tarkalleen silloin kun joko $z_1=0$, $z_2=0$, tai $z_1=z_2=0$ (tulon nollasääntö on itse asiassa seuraus siitä, että jokaisella nollasta eroavalla luvulla on käänteisluku). Voidaan itse asiassa näyttää toteen, että kompleksiluvut toteuttavat esimerkin **??** kunta-aksioomat.

4.2 Kompleksilukujen graafinen esitys, itseisarvo ja polaariesitys

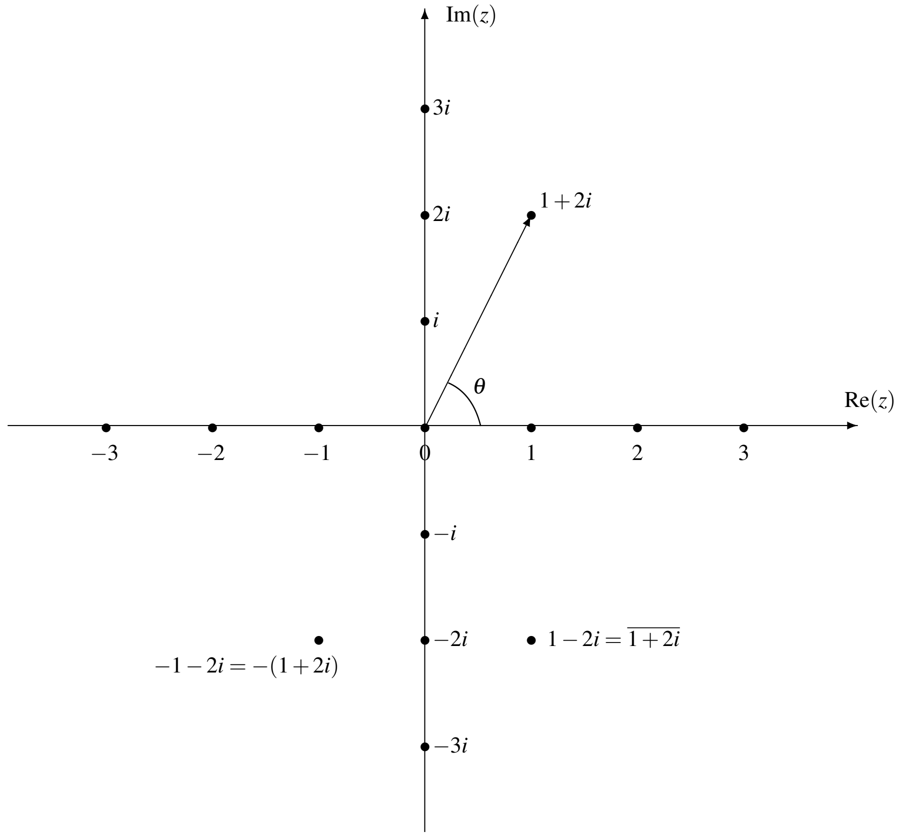
Kompleksiluku voidaan käsittää reaalilukuparina, joten luonteva graafinen esitys kompleksiluvuille on tason piste (Kuva 4.1).

Kompleksilukuja ei kuitenkaan voida yleisesti ottaen järjestää suuruusjärjestykseen kuten reaalilukuja. Ei voida määritellä milloin kompleksiluku on suurempi kuin toinen, mistä seuraa, että kompleksilukujen kohdalla ei voi puhua epäyhtälöistä. Sen sijaan kompleksiluvuille voidaan määritellä *itseisarvo* ja kahden eri kompleksiluvun itseisarvoa voidaan verrata.

Määritelmä 34 (Kompleksiluvun itseisarvo). Olkoon $z=x+yi$. Tällöin $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Samoin kuin reaalilukujen tapauksessa, kompleksilukujen itseisarvo merkitsee *etäisyyttä nollasta (origosta)* (Kuva 4.1).

Huomautus 34. Edellisen määritelmän merkinnöin $z\overline{z}=x^2+y^2=|z|^2$. Tästä seuraa lauseen 14 perusteella, että $|z_1z_2|^2=z_1z_2\overline{z_1z_2}=z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2}=|z_1|^2|z_2|^2$, mistä edelleen seuraa, että $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ pitää myös kompleksiluvuille paikkansa. Myös kolmioepäyhtälö



Kuva 4.1 Kompleksilukujen graafinen esitys. Kuviossa näkyvän nuolen pituus kuvaa kompleksiluvun $1+2i$ itseisarvoa ja θ sen vaihekulmaa. Vaaka-akselia kutsutaan *reaaliakseliksi* ja pystyakselia *imaginaariakseliksi*. Reaaliakselilla olevat luvut ovat reaalisia, kun taas imarinääriakselin lukuja kutsutaan *puhtaiksi* imaginaariluvuiksi. Liittoluku saadaan peilaamalla reaaliakselin suhteen ja vastaluku origon suhteen.

$$|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$$

pätee kompleksiluvuille, vaikka sitä ei tässä yhteydessä todistetakaan.

Kompleksiluku $z=x+yi$ voidaan esittää paitsi reaalilukuparina (x,y), myös antamalla pisteen (x,y) etäisyys origosta (mikä on siis yhtä kuin $|z|$, kompleksiluvun z itseisarvo) sekä origon ja pisteen (x,y) kautta kulkevan suoran ja reaaliakselin välinen kulma θ (ns. *vaihekulma*) (Kuva 4.1). Tästä esityksestä käytetään nimeä *polaariesitys* tai *napakoordinaattiesitys*. Kompleksiluvun esitystä muodossa $z=x+iy$ kutsutaan *karteesiseksi* tai *xy*-esitykseksi.

Huomautus 35 (Polaariesityksen etsiminen). Kompleksiluvun karteesisesta esityksestä $z=x+yi$ saadaan polaariesitys seuraavasti: Itseisarvon laskeminen määritelmän 34 mukaan suoraviivaisesti: $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Tämän lisäksi alkeistrigonometrian mukaan $\tan\theta=\frac{y}{x}$ (kts. kuva 4.1), joten pääteltäväksi jää θ. Määritelmän mukaan nimittäin funktion arctan arvot ovat aina välillä $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, mutta selvästikin kompleksilukujen vaihekulmia on olemassa myös tämän välin ulkopuolella. Tämä tulee ymmärrettäväksi siten, että tangenttifunktio saa samat arvot kulman π välein: $\tan(x+\pi)=\tan x$.

Vaihekulman θ valinta tehdään seuraavasti:

1. Tapauksessa $x=0$ voidaan vaihekulmaksi valita $\theta=\frac{\pi}{2}$, jos $y>0$, ja $\theta=-\frac{\pi}{2}$, jos $y<0$.
2. Tapauksessa $x>0$ voidaan vaihekulmaksi valita $\theta=\arctan\frac{y}{x}$, ja
3. Tapauksessa $x<0$ voidaan vaihekulmaksi valita $\theta=\arctan\frac{y}{x}+\pi$.

Reaalilukujen ($y = 0$) vaihekulmaksi voidaan siis edellämainitun perusteella aina valita 0 (positiiviset reaaliluvut) tai π (negatiiviset reaaliluvut).

On kuitenkin huomattava, että kompleksiluvun vaihekulma *ei ole koskaan yksikäsitteinen*, sillä siihen voidaan lisätä tai siitä vähentää niin monta täyden ympyrän (2π) monikertaa kuin halutaan.

Esimerkki 36. Vaihekulman $-\frac{\pi}{2}$ sijaan voidaan yhtä hyvin valita vaihekulma $-\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$. Piirrä kuva ja havaitse itse!

Esimerkki 37. Kuvan 4.1 tilanteessa $z = 1 + 2i$, joten $|z|^2 = 1^2 + 2^2$, ja siis $|z| = \sqrt{5}$. Vaihekulma θ on yhtälön $\tan\theta = \frac{2}{1} = 2$ ratkaisu, ja tälle saadaan likiarvo $\theta = 1,10715\ldots$ (radiaaneina).

Huomautus 36 (Polaarimuodosta karteesiseen). Jos $r = |z|$ on kompleksiluvun z itseisarvo ja θ sen vaihekulma, voidaan alkeistrigonometrian perusteella (katso kuva 4.1) kirjoittaa $x = r\cos\theta$ ja $y = r\sin\theta$, joten kompleksiluku $z = x + yi$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta.$$

Näin saadusta muodosta voidaan lisäksi huomata, että

$$|z| = |r(\cos\theta + i\sin\theta)| = \underbrace{|r|}_{|z|}|\cos\theta + i\sin\theta|,$$

ja jos $z \neq 0$, nähdään välittömästi että

$$|\cos\theta + i\sin\theta| = 1,$$

mikä tarkoittaa sitä, että kompleksiluku $\cos\theta + i\sin\theta$ on yksikköympyrällä.

Näin saatu esitys ei kuitenkaan ole muotoa jossa kompleksilukujen polaariesitys yleensä kirjoitetaan. Yleensä käytetään vielä *Eulerin kaavaa* (vaihtoehtoinen nimitys: *Eulerin identiteetti*).

Lause 15 (Eulerin kaava). $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

(kaavassa e on neperin luku, kaava määrittelee e-kantaisen potenssin ns. pääarvon).

Todistus. Perustelu Eulerin kaavalle esitetään kurssikokonaisuuden myöhemmässä osassa, sarjakehitelmien yhteydessä.

Huomautus 37. Trigonometristen funktioiden yhteenlaskukaavoista seuraa, että kaava

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{4.1}$$

pätee, vaikka eksponentit ovat imaginaarilukuja. Itse asiassa olisi mahdollista valita toisenlainen lähestymistapa: kaava (4.1) on mahdollista todistaa käyttämättä trigonometristen funktioiden yhteenlaskukaavoja, jotka puolestaan voitaisiin johtaa kaavasta (4.1).

Taustatietoa

Leonhard Euler (1707–1783) oli 1700-luvun merkittävin matemaatikko ja lienee kaikkien aikojen tuottelian matemaatikko julkaisujen määrän suhteen. Hänen kaikki työnsä voitaneen esittää n. 80:ssa kirjassa, mutta nykyisin, yli 230 vuotta Eulerin kuoleman jälkeen vuonna 1911 aloitettu työ on vielä kesken ja vasta 76 kokoomateosta on julkaistu Sveitsin tiedeakatemian rahoittamassa Opera Omnia -sarjassa. Euler syntyi Baselissa, mutta toimi suurimman osan urastaan professorina Pietarissa ja Berliinissä.

(kuva: Wikimedia Commons)

Eulerin kaavaa käyttäen voidaan kompleksiluvun polaari- eli napakoordinaattiesitys kirjoittaa seuraavaan muotoon.

Lause 16 (Eksponenttimuotoinen polaariesitys). *Jos kompleksiluvun z itseisarvo on r ja vaihekulma θ, niin*

$$z = re^{i\theta}.$$

Esimerkki 38. Luvun $z = 1 - i\sqrt{3}$ itseisarvo on $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. Vaihekulma θ toteuttaa yhtälön $\tan\theta = \frac{-\sqrt{3}}{1}$, joten voidaan valita $\theta = -\frac{\pi}{3}$ (yhtä hyvin voitaisiin valita $\theta = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$). Tällöin siis

$$1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Polaariesitys antaa kompleksilukujen tulolle selkeän tulkinnan: Olkoon $z_1 = |z_1|\, e^{i\theta_1}$ ja $z_2 = |z_2|\, e^{i\theta_2}$. Tällöin

$$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|\, e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = |z_1|\,|z_2|\, e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

mikä siis merkitsee sitä, että

tulon z_1z_2 itseisarvo on kompleksilukujen z_1 ja z_2 itseisarvojen tulo, ja että tulon z_1z_2 vaihekulma on kompleksilukujen z_1 ja z_2 vaihekulmien summa.

Huomautus 38. Koska $\sin\pi = 0$ ja $\cos\pi = -1$, seuraa Eulerin kaavasta yhtälö

$$e^{i\pi} = -1,$$

mitä pidetään yhtenä informatiivisimmista klassisen matematiikan kaavoista: siinä yhdistyvät merkittävät luvut e, π ja i hyvin yksinkertaisella tavalla. Selvitä (harjoitustehtävä) mitä ovat luvut $e^{i\frac{\pi}{4}}$, $e^{i\frac{\pi}{2}}$ ja $e^{i\frac{3\pi}{2}}$ ilmoitettuna reaaliosan ja imaginaariosan avulla.

Toinen kompleksilukujen yhteydessä usein esiintyvä kaava on ns. de Moivren kaava, jota ei kuitenkaan tällä kurssilla paljon käytetä. Se luo kuitenkin mielenkiintoisen kytköksen trigonometriaan.

Lause 17 (de Moivren kaava). $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$

Todistus. Kaavasta (4.1) seuraa (miten?), että kaikille kokonaisluvuille n pätee $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. Tällöin Eulerin kaavan perusteella saadaan

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Muistamalla Eulerin kaava saadaan helposti monia trigonometrian kaavoja.

Esimerkki 39. $e^{2i\theta} = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$, mutta toisaalta

$$e^{2i\theta} = (e^{i\theta})^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta.$$

Yhdistämällä näin saadut esitykset huomataan, että $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ ja $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$.

Muistutetaan lopuksi yksinkertaisesta mutta tärkeästä tosiasiasta, jolla on merkittäviä seurauksia mm. kompleksilukujen logaritmikäsitteelle.

Huomautus 39. Koska kompleksiluvun vaihekulma ei ole yksikäsitteinen, ei myöskään eksponenttimuotoinen polaariesitys ole yksikäsitteinen, vaan

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta = \cos(\theta + n\cdot 2\pi) + i\sin(\theta + n\cdot 2\pi) = e^{i(\theta + n\cdot 2\pi)},$$

missä $n \in \mathbb{Z}$.

Edellisen yhtälön perusteella $e^{n\cdot 2\pi i} = 1$ aina kun n on kokonaisluku.

4.3 Kompleksinen eksponenttifunktio ja logaritmi

Kompleksisen, e-kantaisen eksponenttifunktion lähtökohtana toimii luonnollisesti Eulerin kaava.

Määritelmä 35 (Kompleksinen eksponenttifunktio). Olkoon $z = x + yi$. Tällöin määritellään

$$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Esimerkki 40.

$$e^{\ln 2 - \frac{\pi}{2}i} = e^{\ln 2}e^{-\frac{\pi}{2}i} = 2(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})) = -2i.$$

Edellisestä määritelmästä seuraa, että kompleksinen eksponenttifunktio toteuttaa reaalialueella tunnetun yhtälön $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, mutta muiden vastaavanlaisten kaavojen suhteen tulee olla huolellinen, kuten jatkossa tullaan näkemään. Huomautuksesta 39 seuraa suoraan, että jos $n \in \mathbb{Z}$, niin

$$e^{z+n\cdot 2\pi i} = e^z e^{n\cdot 2\pi i} = e^z,$$

mikä merkitsee sitä, että kompleksinen eksponenttifunktio ei ole injektio, vaan $2\pi i$-jaksoinen funktio, joka saa saman arvon äärettömän monella kompleksiluvulla. Tästä seuraa, että kompleksilukujen eksponettifunktiolla ei voi olla käänteisfunktiota, vaan että *kompleksinen logaritmi* on välttämättä relaatio.

Suoraviivaisimman tien kompleksisen logaritmin määrittelyyn tarjoaa polaariesitys: Jos $z = |z|\,e^{i\theta}$, voidaan kompleksiluku z kirjoittaa vaihekulman monikäsitteisyyden vuoksi äärettömän monella eri tavalla:

$$z = |z|\,e^{i(\theta + n\cdot 2\pi)},$$

missä $n \in \mathbb{Z}$. Nämä esitysasut antavat aiheen seuraavaan määritelmään.

Määritelmä 36 (Kompleksinen logaritmi). Kompleksinen logaritmi $\operatorname{Log} z$ on relaatio $\operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, joka liittää lukuun $z = |z|e^{i\theta}$ kaikki arvot

$$\operatorname{Log} z = \{\ln|z| + i(\theta + n \cdot 2\pi) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Esimerkki 41. Lasketaan luvun -2 logaritmin arvot. Tätä varten etsitään luvun -2 polaariesitys: $-2 = 2e^{\pi i}$, mutta on otettava huomioon, että vaihekulmaan voidaan lisätä mikä hyvänsä 2π:n monikerta, jolloin siis $-2 = 2e^{i(\pi + n \cdot 2\pi)}$, missä $n \in \mathbb{Z}$. Tällöin siis kaikki logaritmin $\operatorname{Log}(-2)$ arvot ovat

$$\operatorname{Log}(-2) = \{\ln 2 + i(\pi + n \cdot 2\pi) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Esimerkki 42. Lasketaan luvun i logaritmin arvot. Tätä varten käytetään polaariesitystä: $i = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i(\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi)}$, missä $n \in \mathbb{Z}$. Näin ollen

$$\operatorname{Log} i = \{i(\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Logaritmin monikäsitteisyyden poistamiseksi voidaan ottaa käyttöön seuraava käsite:

Määritelmä 37. Logaritmin *päähaara* $\overline{\operatorname{Log}}$ on se logaritmin

$$\operatorname{Log} z = \{\ln|z| + i(\theta + n \cdot 2\pi) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

arvo

$$\overline{\operatorname{Log}} z = \ln|z| + i(\theta + 2n_1\pi),$$

jolle pätee $\theta + 2n_1\pi \in (-\pi, \pi]$.

Esimerkki 43. $\overline{\operatorname{Log}}(-2) = \ln 2 + \pi i$ ja $\overline{\operatorname{Log}} i = i\frac{\pi}{2}$.

4.4 Kompleksinen potenssinkorotus

Potenssiinkorotus, jossa sekä kantaluku että eksponentti voivat olla kompleksilukuja määritellään logaritmi- ja eksponenttifunktion avulla. Koska reaaliluvuille $a \neq 0$ ja b pätee

$$a^b = e^{\ln a^b} = e^{b \ln a},$$

käytetään tätä lähtökohtana kompleksista potenssia määriteltäessä. Haittapuolena kompleksilukujen yhteydessä on tietenkin logaritmin monikäsitteisyys, mutta osoittautuu, että joissakin tapauksissa eksponenttifunktion epäinjektiivisyys poistaa monikäsitteisyyttä jonkin verran. Lähtökohtaisesti kuitenkin hyväksytään, että kompleksinen potenssiinkorotus $(a, b) \mapsto a^b$ ei ole funktio, vaan relaatio.

Määritelmä 38. Olkoon $a = re^{i\theta}$ luvun a polaariesitys. Kompleksisen potenssiinkorotuksen kaikki arvot ovat

$$a^b = e^{b \operatorname{Log} a} = \{e^{b(\ln r + i(\theta + n \cdot 2\pi))} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Esimerkki 44. Lasketaan potenssin i^i kaikki arvot. Aiemman esimerkin mukaan logaritmin $\operatorname{Log} i$ kaikki arvot ovat

$$\operatorname{Log} i = \{i(\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi) \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

joten

$$i \log i = \{-\frac{\pi}{2} - n \cdot 2\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Tällöin siis

$$i^i = e^{\operatorname{Log} i^i} = e^{i \operatorname{Log} i} = \{e^{-\frac{\pi}{2} - n \cdot 2\pi} \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Esimerkki 45. Lasketaan potenssin 3^2 kaikki arvot.

$$3^2 = e^{\operatorname{Log} 3^2} = e^{2 \operatorname{Log} 3},$$

joten on siis selvitettävä kaikki logaritmin $\operatorname{Log} 3$ arvot. Luvun 3 polaariesitys on $3 = 3e^{i \cdot 0} = 3e^{n \cdot 2\pi i}$, missä $n \in \mathbb{Z}$, mistä saadaan

$$\operatorname{Log} 3 = \{\ln 3 + n \cdot 2\pi i \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Näin ollen potenssin 3^2 kaikki arvot ovat

$$\{e^{2 \ln 3 + 4n\pi i} \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{e^{\ln 3^2} e^{4n\pi i} \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{3^2\} = \{9\}.$$

Tässä siis eksponenttifunktio kumoaa logaritmifunktion tuottaman monikäsitteisyyden. On helppo huomata, että näin tapahtuu aina, kun eksponentti on kokonaisluku, jolloin potenssi voidaan aina määritellä toistettuna kertolaskuna.

Esimerkki 46. Lasketaan kaikki potenssin $8^{\frac{1}{3}}$ arvot.

$$8^{\frac{1}{3}} = e^{\operatorname{Log} 8^{\frac{1}{3}}} = e^{\frac{1}{3} \operatorname{Log} 8},$$

joten on selvitettävä kaikki $\operatorname{Log} 8$:n arvot. $8 = 8e^{n \cdot 2\pi i}$, mistä

$$\operatorname{Log} 8 = \{\ln 8 + n \cdot 2\pi i \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

ja potenssin $8^{\frac{1}{3}}$ kaikki arvot ovat

$$\{e^{\frac{1}{3}(\ln 8 + n \cdot 2\pi i)} \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{e^{\frac{1}{3} \ln 8} e^{\frac{n \cdot 2\pi i}{3}} \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{2e^{\frac{n \cdot 2\pi i}{3}} \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Nyt tulee vielä selvittää, mitä arvoja $e^{\frac{n \cdot 2\pi i}{3}}$ saa, kun $n \in \mathbb{Z}$. Jaetaan tätä varten tarkastelu kolmeen osaan: 1) $n = 3k$, missä $k \in \mathbb{Z}$. Tällöin $e^{\frac{n \cdot 2\pi i}{3}} = e^{\frac{2 \cdot 3k \cdot \pi i}{3}} = e^{2k\pi i} = 1$. 2) $n = 3k + 1$, missä $k \in \mathbb{Z}$. Tällöin $e^{\frac{n \cdot 2\pi i}{3}} = e^{\frac{2 \cdot (3k+1) \cdot \pi i}{3}} = e^{2k\pi i} e^{\frac{2\pi i}{3}} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. 3) $n = 3k + 2$, missä $k \in \mathbb{Z}$. Tällöin $e^{\frac{n \cdot 2\pi i}{3}} = e^{\frac{2 \cdot (3k+2) \cdot \pi i}{3}} = e^{2k\pi i} e^{\frac{2 \cdot 2\pi i}{3}} = e^{\frac{4\pi i}{3}}$.

Näin ollen kaikki potenssin $8^{\frac{1}{3}}$ arvot ovat

$$\{2, 2e^{\frac{2\pi i}{3}}, 2e^{\frac{4\pi i}{3}}\},$$

jotka voidaan vielä Eulerin kaavan avulla kirjoittaa muotoon

$$\{2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}.$$

Tämä on sopusoinnussa sen kanssa, että mikä hyvänsä näistä luvuista potenssiin kolme korotettuna antaa luvun 8.

Tässä esimerkissä eksponettifunktio ei kumoa kokonaan logaritmin tuottamaa monikäsitteisyyttä, sillä eksponentilla on nimittäjä 3.

Edellisissä esimerkeissä havaitut seikat on mahdollista yleistää suoraviivaisesti: Koska kompleksisen potenssin määritelmän (määritelmä 38) mukaan kaikki arvot ovat muotoa

$$e^{b(\ln r + i(\theta + n \cdot 2\pi))} = e^{b \ln r + b\theta i} e^{b \cdot n \cdot 2\pi i},$$

missä $n \in \mathbb{Z}$, voidaan toimia kuten edellisissä esimerkeissä ja todeta seuraava tulos.

Lause 18.

- *Jos $b \in \mathbb{Z}$, kompleksinen potenssi a^b on yksikäsitteinen ja yhtyy kertolaskun avulla saatuun määritelmään:*
$$a^b = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b\ kpl}$$
- *Jos $b = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ on supistetussa muodossa, on kompleksisella potenssilla a^b q eri arvoa, jotka saadaan yhdestä arvosta kertomalla luvuilla $e^{\frac{n \cdot 2\pi i}{q}}$, $n \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$.*
- *Jos $b \notin \mathbb{Q}$, on kompleksisella potenssilla a^b äärettömän monta eri arvoa, jotka saadaan yhdestä arvosta kertomalla luvuilla $e^{b \cdot n \cdot 2\pi i}$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Huomautus 40. Kokonaislukueksponentin $b = n$ kannalta polaarimuoto voi toisinaan olla käyttökelpoinen:
$$z^b = (|z|\, e^{i\theta})^n = |z|^n\, e^{in\theta},$$
mikä siis merkitsee sitä, että itseisarvo korotetaan potenssiin n ja vaihekulma kerrotaan luvulla n.

Esimerkki 47. Lasketaan $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))^{105}$. Tätä varten selvitetään ensin polaariesitys: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = e^{i\frac{\pi}{4}}$, josta $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))^{105} = e^{i\frac{\pi}{4}\cdot 105} = e^{i\frac{\pi}{4}\cdot(13\cdot 8+1)} = e^{13\cdot 2\pi i} e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$.

Aiemmat määritelmät johtavat myös siihen, että n:s juuri kompleksiluvusta saadaan juurtamalla itseisarvo (reaalinen juuri) ja *jakamalla* vaihekulma luvulla n. Tällöin on vain huomioitava, että kompleksiluvulla on ääretön määrä esitysmuotoja (vaihekulmaan voidaan aina lisätä 2π:n monikerta).

Esimerkki 48. Koska $-1 = e^{\pi i} = e^{3\pi i}$, ovat luvun -1 kaikki toiset juuret $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$ ja $e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i$.

Esimerkki 49. Luku 1 voidaan kirjoittaa $1 = e^{0\cdot i} = e^{2\pi i} = e^{2\cdot\pi i} = e^{3\cdot 2\pi i} = \ldots$, joten luvun 1 n:nnet juuret ovat
$$\{e^{0\cdot\frac{2\pi i}{n}} = 1, e^{1\cdot\frac{2\pi i}{n}}, e^{2\cdot\frac{2\pi i}{n}}, \ldots, e^{(n-1)\cdot\frac{2\pi i}{n}}\}.$$

Määritelmä 39. Yllä olevia lukuja kutsutaan *n:nsiksi ykkösenjuuriksi*.

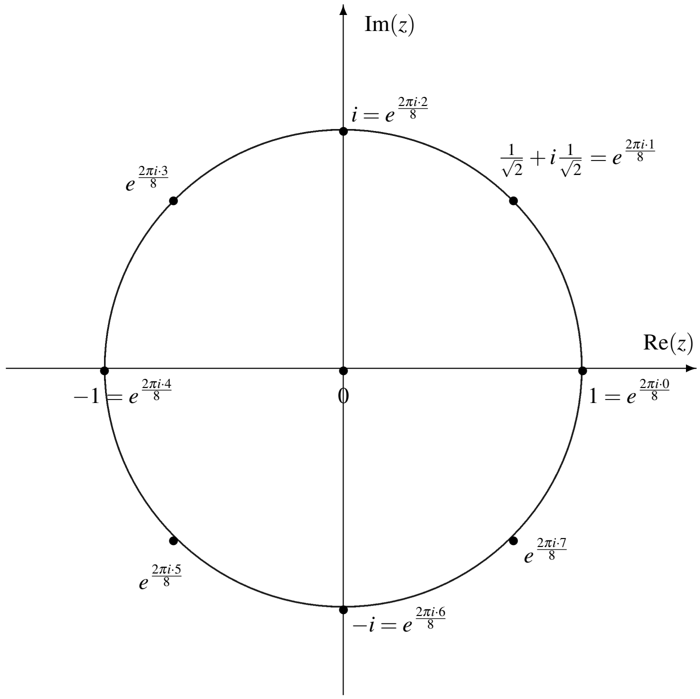
Nimensä mukaan n:nnet ykkösenjuuret potenssiin n korotettuna tuottavat ykkösen, mikä nähdään suoraan lausekkeista. Vaihekulmista nähdään lisäksi, että ykkösenjuuret sijaitsevat tasavälein yksikköympyrällä. Lisäksi 1 on aina niiden joukossa (kts. kuva 4.4). Vielä yksi merkittävä huomio on, että kaikki n:nnet ykkösenjuuret saadaan ns. *primitiivisen ykkösenjuuren* potensseina.

Kompleksista potenssia voidaan myös rajoittaa samoin kuin logaritmiakin:

Määritelmä 40. Kompleksisen potenssin *pääarvo* määritellään käyttäen logaritmin päähaaraa:
$$a^b = e^{b\overline{\mathrm{Log}}\,a}.$$

Kompleksisen potenssin pääarvolle ei ole vakiintunutta merkintää, mutta yleensä kompleksisesta potenssista puhuttaessa tarkoitetaan sen pääarvoa, ellei toisin ilmoiteta.

Esimerkki 50. Koska $\overline{\mathrm{Log}}\,i = i\frac{\pi}{2}$, on potenssin i^i pääarvo
$$e^{\overline{\mathrm{Log}}\,i^i} = e^{i\overline{\mathrm{Log}}\,i} = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$



Kuva 4.2 Kahdeksannet ykkösenjuuret ovat kaikki yhtälön $z^8 = 1$ ratkaisut eli polynomin $z^8 - 1$ nollakohdat.

Esimerkki 51. Kompleksilukujen neliöjuuret voidaan aina löytää xy-muodossa seuraavasti: Suoralla laskulla todetaan, että $(x+yi)^2 = (x^2-y^2)+2xy\cdot i$, joten luvun $a+bi$ neliöjuuren $x+yi$ pitää toteuttaa $a = x^2-y^2$ sekä $b = 2xy$. Ratkaisemalla x ja y yhtälöparista

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

saadaan luvun $a+bi$ neliöjuuret muodossa $x+yi$.

4.5 Kompleksilukujen trigonometriset funktiot

Trigonometristen funktioiden laajentaminen kompleksialueelle perustuu Eulerin kaavaan

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Jos tähän sijoitetaan θ:n paikalle $-\theta$, saadaan

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta.$$

Laskemalla yhteen näin saadut kaksi yhtälöä saadaan $e^{i\theta}+e^{-i\theta} = 2\cos\theta$, kun taas vähennyslasku tuottaa $e^{i\theta}-e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$. Koska eksponenttifunktio on jo määritelty kaikille kompleksiluvuille, voidaan asettaa seuraava määritelmä:

Määritelmä 41 (Sini ja kosini kompleksiluvuille).

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}) \quad \text{ja} \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}).$$

Muut trigonometriset funktiot kuten tangentti määritellään samoin kuin reaaliluvuille, esim. $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$. Koska kompleksinen eksponenttifunktio on yksikäsitteinen, samoin ovat sini ja kosini. Lisäksi on huomattava, että eksponenttifunktion jaksosta $2\pi i$ seuraa sinille ja kosinille jakso 2π. Tunnettu trigonometrinen identiteetti $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ voidaan huomata oikeaksi jo heti määritelmän perusteella. Trigonometrian summakaavat puolestaan voidaan johtaa eksponenttifunktion ominaisuudesta $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

Esimerkki 52.

$$\cos i = \frac{1}{2}(e^{i\cdot i} + e^{-i\cdot i}) = \frac{1}{2}(e^{-1} + e^{1}) \approx 1,54,$$

joten trigonometristen funktioiden arvo kompleksialueella *ei rajoitu* välille $[-1,1]$. Itse asiassa trigonometristen funktioiden arvo ei välttämättä ole reaalinen, kuten helposti nähdään laskemalla $\sin i$.

4.6 Algebran peruslause

Kun kompleksiluvut on otettu käyttöön, voidaan tietenkin kysyä olisiko syytä laajentaa lukujoukkoja vielä tästäkin. Kompleksilukuja koskevan osion alussa esitetty tarve ainakin poistuu seuraavan tuloksen myötä.

Lause 19 (Algebran peruslause). *Olkoon $P(z)$ mikä hyvänsä polynomi, joka ei ole vakio ja jonka kertoimet ovat kompleksilukuja. Tällöin polynomiyhtälöllä $P(z) = 0$ on aina olemassa ratkaisu joukossa $\mathbb{C}$.*

Todistus. Vaatii esitietoja, jotka eivät kuulu tähän kurssiin ja on muutenkin mutkikas, sivuutetaan.

Edellinen tulos kertoo, että kompleksiluvut muodostavat ns. *algebrallisesti suljetun kunnan*, jossa kaikilla polynomeilla on on nollakohta, eikä siksi polynomiyhtälöiden ratkaisun kannalta tarvitse laajentaa lukualuetta enempää.

Tästä huolimatta voidaan kuitenkin ajatella kompleksilukujen kuntaa laajennettavaksi edelleen. Yksi mahdollinen laajennustapa nousee esille kompleksilukujen määritelmästä: Kompleksiluvuthan ovat oleellisesti ottaen reaalilukupareja, joten voitaisiin otaksua, että laajempi lukujoukko saataisiin tarkastelemalla reaalilukukolmikoita, -nelikoita, jne. ja määrittelemällä näille yhteen- ja kertolaskut siten, että reaalilukujen tutut laskusäännöt (vaihdannaisuus, liitännäisyys, käänteisluvut, jne., katso esimerkki **??**) säilyisivät.

Tarkempi algebran tutkimus osoittaa kuitenkin, että tämä ei ole mahdollista. Käy ilmi, että kaikki tällaiset kolmikoihin, nelikoihin, jne. perustuvat laajennukset olisivat reaalilukujen kunnan *algebrallisia* laajennuksia, ja algebran peruslauseesta seuraa, että kompleksilukujen kunnalla ei ole algebrallisia laajennuksia.

Huomautus 41. Algebran peruslause takaa, että jokaisella kompleksikertoimisella polynomilla $P(z)$ on *olemassa* nollakohta $c \in \mathbb{C}$, ei sitä, että nollakohdat saataisiin polynomin kertoimista algebrallisesti. Korkeintaan astetta 4 oleville polynomeille nollakohdat kuitenkin voidaan löytää polynomin kertoimien algebrallisina funktioina, toisin sanoen korkeintaan astetta 4 oleville polynomeille on olemassa *algebrallinen* ratkaisukaava. Viidettä tai sitä korkeampaa astetta oleville polynomeille ei ole yleistä algebrallista ratkaisukaavaa, mutta minkä hyvänsä polynomin nollakohdille voidaan aina löytää niin tarkat likiarvot kuin halutaan.

Taustatietoa

Girolamo Cardano (1501–1576) oli italialainen lääkäri ja matemaatikko, jonka julkistamat ratkaisukaavat 3. ja 4. asteen yhtälöille johtivat kompleksilukujen yleiseen käyttöönottoon. Cardano ei kuitenkaan keksinyt kaavoja itse, vaan oli saanut tietoonsa 3. asteen ratkaisukaavat, jotka Niccoló Tartaglia (n. 1499–1557) ja Scipio del Ferro (n. 1465–1526) olivat kehittäneet toisistaan tietämättä aiemmin. Cardano kehitti 4. asteen yhtälön ratkaisukaavan yhdessä oppilaansa Lodovico Ferrarin (1522–1565) kanssa ja julkisti kaikki ratkaisukaavat teoksessan *Ars magna* (1554). Siksi mainitut kaavat tunnetaan nykyisin *Cardanon kaavoina*
(kuva: Wikimedia Commons)

Lause 20. *Jos polynomilla $P(z)$ on nollakohta c_1, niin $P(z)$ on jaollinen polynomilla $z - c_1$.*

Todistus. Jakolaskulla (polynomien jakolaskua käsitellään tarkemmin monisteen viimeisessä luvussa) saadaan $P(z) = (z - c_1)P_1(z) + r(z)$, missä $P_1(z)$ on osamäärä ja $r(z)$ jakojäännös. Koska jakojäännöksen $r(z)$ aste on pienempi kuin jakajan $z - c$ aste, on $r(z)$ välttämättä vakiopolynomi, merkitään $r(z) = r$. Nyt siis $P(z) = (z - c_1)P_1(z) + r$, ja sijoittamalla c_1 saadaan $0 = P(c_1) = (c_1 - c_1)P_1(z_0) + r = r$, siis $r = 0$ ja $P(z) = (z - c_1)P_1(z)$.

Huomautus 42. Huomaa, että vastakkainen tulos pätee ilman muuta: jos $P(z)$ on jaollinen polynomilla $z - c_1$, on sillä nollakohta c_1. Tämä seuraa suoraan sijoittamalla c_1 hajotelmaan $P(z) = (z - c_1)P_1(z)$.

Huomautus 43. Olkoon $P_1(z)$ edellisen lauseen osamäärä. Se on polynomi, jonka aste on yhtä pienempi kuin $P(z)$:n aste, ja jos se ei ole vakio, on sillä algebran peruslauseen nojalla nollakohta c_2. Edelleen, lauseen 20 nojalla $P_1(z) = (z - c_2)P_2(z)$, missä $P_2(z)$:n aste on yhtä pienempi kuin $P_1(z)$:n. Tällöin siis $P(z) = (z - c_1)(z - c_2)P_2(z)$, ja samaa menettelyä voidaan soveltaa edelleen polynomiin $P_2(z)$, ellei se ole vakio (siis astetta 0). Lopulta päädytään lausekkeeseen $P(z) = (z - c_1)(z - c_1) \cdot \ldots \cdot (z - c_d)a$, missä $a \in \mathbb{C}$ on vakiopolynomi ja d polynomin $P(z)$ aste. Hajotelma

$$P(z) = a(z - c_1)(z - c_2) \cdot \ldots \cdot (z - c_d) \tag{4.2}$$

kertoo sen, että *jokainen polynomi jakautuu kompleksilukujen joukossa ensimmäisen asteen tekijöihin*. Vastaava ei pidä paikkansa reaaliluvuille: jos esimerkiksi polynomilla $x^2 + 1$ olisi reaalinen ensimmäisen asteen tekijä, olisi sillä myös huomautuksen 42 mukaan reaalinen nollakohta.

Seuraus 4. *Astetta $d \geq 1$ olevalla polynomilla $P(z)$, on korkeintaan d nollakohtaa.*

Todistus. Hajotelmassa (4.2) luvut $c_1, c_2, \ldots, c_d$ ovat kaikki $P(z)$:n nollakohdat. Koska d on polynomin $P(z)$ aste, on nollakohtia korkeintaan d.

Huomautus 44. Kertomalla tulo (4.2) auki nähdään helposti, että a on polynomin $p(z)$ korkeimman asteen termin vakiokerroin.

Milloin sitten astetta d olevalla polynomilla voi olla *vähemmän* kuin d nollakohtaa? Tarkastelemalla hajotelmaa (4.2) huomataan, että näin voi käydä vain silloin, kun jotkin luvuista $c_1, c_2, \ldots, c_d$ ovat keskenään yhtäsuuria. Esimerkkinä käy toisen asteen polynomi $z^2 - 2z + 1 = (z-1)(z-1)$, jolla on vain yksi nollakohta $z = 1$. Tämän kaltaisessa tapauksessa sanotaan kuitenkin, että $z = 1$ on polynomin $z^2 - 2z + 1$ *kaksinkertainen* nollakohta. Vastaavasti määritellään kolminkertainen nollakohta, jne.

Kompleksiluvut annetaan **Matlab**ille seuraavan esimerkin mukaisesti:

```
>> (5+3i)/(1+2i)

ans =

    11/5       -     7/5i
```

Vastaus siis tulkitaan siten, että $\frac{5+3i}{1+2i} = \frac{11}{5} - \frac{7}{5}i$.

Kompleksikonjugaatin tuottaa `conj(z)` ja itseisarvon `abs(z)`. Vaihekulma puolestaan saadaan komennolla `angle(z)`. Reaali- ja imaginaariosat saadaan eroteltua komennoilla `real(z)` ja `imag(z)`.

Selitä vastaus seuraavaan syötteeseen:

```
>> imag(log(-1))

ans =

    3.1416

>>
```

Luvun oleellisia asioita:

- Imaginaariyksikkö, kompleksilukujen summa, tulo ja osamäärä.
- Liittoluku.
- Kompleksilukujen itseisarvo ja polaariesitys.
- Eulerin kaava.
- Kompleksilukujen eksponenttifunktio, sini, kosini, potenssi, juuret ja logaritmi; pääarvo.
- Algebran peruslause.