Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Demonstraatio 2, 25.1.2024

1. Kalle tulee töihin kävellen 10%, pyörällä 70% ja bussilla 20% todennäköisyydellä. Kävellen tullessa hän on myöhässä 5% todennäköisyydellä, pyörällä tullessa 3% todennäköisyydellä, ja bussilla kulkiessa 7% todennäköisyydellä. Laske todennäköisyys sille, että Kalle myöhästyy töistä.

   Ohje: Käytä kokonaistodennäköisyyden kaavaa.

   Mallivastaus: Käytetään kirjaimia K, P ja B merkitsemään eri kulkutapoja. Kallen myöhästymistodennäköisyys voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M) &= \mathbb{P}(M \mid K)\mathbb{P}(K) + \mathbb{P}(M \mid P)\mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(M \mid B)\mathbb{P}(B) \\ &= 0,05 \cdot 0,1 + 0,03 \cdot 0,7 + 0,07 \cdot 0,2 = 0,04 \end{aligned}$$

2. Kalle myöhästyi töistä eräänä aamuna. Millä todennäköisyydellä Kalle tuli töihin bussilla? Entä millä todennäköisyydellä hän tuli pyörällä?

   Ohje: Käytä Bayesin kaavaa ja edellisen tehtävän tulosta.

   Mallivastaus:

$$\mathbb{P}(B \mid M) = \frac{\mathbb{P}(M \mid B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{0,07 \cdot 0,2}{0,04} = 0,35$$

   (tuli bussilla) ja

$$\mathbb{P}(P \mid M) = \frac{\mathbb{P}(M \mid P) \cdot \mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{0,03 \cdot 0,7}{0,04} = 0,525$$

   (tuli pyörällä).

3. Osoita, että $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$. Ohje: $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ ja $(A \cap B) \cap (A \setminus B) = \emptyset$ (miksi?). Vennin diagrammi riittää.

   Mallivastaus: Jos $x \in A$, niin joko $x \in A \cap B$ tai $x \in A \setminus B$. Toisaalta jos $x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B)$, niin joko $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ tai $x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A$. Näin ollen

$$x \in A \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B),$$

   mikä osoittaa että joukot ovat yhtäsuuret. Jos $x \in A \cap B$, niin $x \in B \Rightarrow x \notin \overline{B} \Rightarrow x \notin A \setminus B$. Samoin jos $x \in A \setminus B \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B$. Tämä osoittaa, että $(A \cap B) \cap (A \setminus B) = \emptyset$.

   Näin ollen

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \setminus B)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \setminus B),$$

   ja väite seuraa tästä.

4. Osoita, että jos A ja B ovat riippumattomat, niin myös A ja $\overline{B}$ ovat riippumattomat. Ohje: $A \cap \overline{B} = A \setminus B$ (miksi?). Vennin diagrammi riittää.

   Mallivastaus: Jos $x \in A \cap \overline{B}$, niin $x \in A$ ja $x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin B$, joten $x \in A \setminus B$. Toisaalta jos $x \in A \setminus B$, niin $x \in A$ ja $x \notin B \Rightarrow x \in \overline{B}$, joten $x \in A \cap \overline{B}$. Näin ollen $A \cap \overline{B} = A \setminus B$.

   Väite saadaan nyt aiempaa tehtävää hyödyntämällä seuraavasti:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) &= \mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}). \end{aligned}$$

5. Painotetun kolikon heitossa saadaan kruuna todennäköisyydellä $\frac{3}{4}$ ja klaava todennäköisyydellä $\frac{1}{4}$. Millä todennäköisyydellä saadaan klaava vasta neljännellä heitolla?

   Mallivastaus:
$$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{256} \approx 0,105$$

6. Olkoot todennäköisyydet kruunalle ja klaavalle samat kuin edellisessä tehtävässä. Mikä on todennäköisyys saada 6 klaavaa, kun kolikkoa heitetään 24 kertaa?

   Mallivastaus:
$$\binom{24}{6} (\frac{3}{4})^{24-6} \cdot (\frac{1}{4})^{6} \approx 0,185$$

7. Olkoot todennäköisyydet kruunalle ja klaavalle samat kuin edellisessä tehtävässä. Kolikkoa heitetään kunnes on saatu tasan 6 klaavaa. Mikä on todennäköisyys sille, että tähän tarvitaan 24 heittoa?

   Mallivastaus: Todennäköisyys on sama kuin ”23 ensimmäistä heittoa tuottaa tasan 5 klaavaa ja 24. heitto klaavan”, siis
$$\binom{23}{5} \left(\frac{3}{4}\right)^{23-5} \left(\frac{1}{4}\right)^{5} \cdot \frac{1}{4} \approx 0,046$$

8. Olkoon $n > 0$. Määritellään funktio $f(x)$ seuraavasti:
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jos } x < 0 \\ \frac{1}{n} & \text{jos } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{jos } x > n. \end{cases}$$

   Piirrä funktion $f(x)$ kuvaaja ja totea että se on (jatkuva) todennäköisyysjakauma. Laske tätä todennäköisyysjakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan odotusarvo ja varianssi.

   Mallivastaus: Koska $f(x) \geq 0$ ja
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_0^n \frac{1}{n}\, dx = 1,$$
   kyseessä on todennäköisyysjakauma. Odotusarvo saadaan integraalilla
$$\mathbb{E}(X) = \int_0^n x\frac{1}{n}\, dx = \frac{1}{n} \Big/_{0}^{n} \frac{1}{2}x^2 = \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}.$$
   Varianssia varten lasketaan
$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^n x^2\frac{1}{n}\, dx = \frac{1}{n} \Big/_{0}^{n} \frac{1}{3}x^3 = \frac{n^2}{3n} = \frac{n^2}{3},$$
   josta
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{n^2}{3} - \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{12}$$

9. Eräällä asuinalueella 95%:lla kotitalouksista on laajakaistayhteys. Mikä on todennäköisyys sille, että 20:stä kyselyyn valitusta kotitaloudesta vain 15 on laajakaistayhteys? Ohje: Binomijakauma.

   Mallivastaus:
$$\binom{20}{15} 0.95^{15} \cdot 0.05^{5} \approx 0,0022$$