Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Demonstraatio 3, 1.3.2024

1. Kaupungissa sattuu keskimäärin 20 tulipaloa vuodessa. Käytä Poissonin jakaumaa arvioidaksesi millä todennäköisyydellä yhden kuukauden aikana sattuu kolme tulipaloa.

2. Kaivovettä pidetään juomakelpoisena, mikäli kolibakteereja esiintyy 100 pmy/100 ml.[1] Jos 10 ml näytteestä löytyy 14 pmy kolibakteeria, mikä on todennäköisyys sille, että kaivovesi on juomakelpoista? Käytä Poissonin jakaumaa arviointiin.

3. Yrityksen asiakaspalveluun saapuu puhelu keskimäärin joka 15. minuutti, ja puhelujen väliajat noudattavat eksponenttijakaumaa.

   a) Määritä parametri v tiheysfunktiolle $f(t) = ve^{-vt}$. Ajan yksikkönä käytetään minuuttia.

   b) Mikä on todennäköisyys sille, että äsken saapuneen puhelun jälkeen seuraava saapuu aikaisintaan 20 minuutin päästä?

   c) Jos aiempi puhelu saapui 10 minuuttia sitten, mikä on todennäköisyys sille, että seuraava saapuu aikaisintaan 15 minuutin päästä?

4. Yritys valmistaa Led-lamppuja, joiden kestoikä on likimain normaalisti jakautunut, odotusarvon ollessa $\mu = 25000$ ja keskihajonnan $\sigma = 3000$ (aikayksikkönä tunti).

   a) Millä todennäköisyydellä lamppu kestää yli 35000 tuntia?

   b) Millä todennäköisyydellä lamppu kestää alle 20000 tuntia?

   c) Mikä on kestoaika, jonka ylittää vain 1% lampuista?

   Ohje c)-kohtaa varten: Matlabissa standardoidun normaalijakauman kertymäfuntion käänteisfunktio saadaan muodossa `norminv(p)`.

5. Oletetaan tunnetuksi, että riippumattomille satunnaismuuttujille X ja Y pätee $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Miten tästä seuraa, että riippumattomille satunnaismuuttujille $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$?

6. Olkoon X normaalijakautuman $N(\mu, \sigma^2)$ mukainen satunnaismuuttuja. Määritä todennäköisyydet $\mathbb{P}(|X - \mu| > 3\sigma)$ ja $\mathbb{P}(|X - \mu| > 5\sigma)$.

   Ohje: $\mathbb{P}(|X - \mu| \leq a) = \mathbb{P}(-a + \mu \leq X < a + \mu)$.

7. Kun heitetään noppaa 1000 kertaa, saadaan 250 kertaa silmäluku 6. Arvioi tällaisen tapahtuman todennäköisyyttä olettaen että kaikki silmäluvut esiintyvät yhtä todennäköisesti.

   Ohje: Mieti aluksi onko todennäköisyyttä helpompi arvioida binomijakauman vai keskeisen raja-arvolauseen avulla.

8. Merkitään klaavaa 1:llä ja kruunaa 2:lle painottamattoman kolikon heitossa. Kun kolikkoa heitetään n kertaa. Olkoon X_i i:nnen heiton tulos (joko 1 tai 2) sekä $\overline{X}_n$ kaikkien heittojen tulosten otoskeskiarvo.

   Käytä suurten lukujen lakia selvittääksesi kuinka monta heittoa n tarvitaan, että $\mathbb{P}(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n)\right| < 0.1) \geq 0.999$

[1] pmy=pesäkettä muodostava yksikkö

9. Hyllyissä on tilaa kirjoille yhteensä 120 m. Yhden kirjan paksuus on keskimäärin $\mu = 2$ cm ja paksuuden keskihajonta $\sigma = 0,6$ cm. Arvioi millä todennäköisyydellä 5800 kirjaa ei mahdu hyllyihin.

   Ohje: Jos X_i on kirjan i paksuus, on yhteispaksuus $X_1 + \ldots + X_{5800}$. Käytä keskeistä raja-arvolausetta.