Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Demonstraatio 3, 1.3.2024

1. Kaupungissa sattuu keskimäärin 20 tulipaloa vuodessa. Käytä Poissonin jakaumaa arvioidaksesi millä todennäköisyydellä yhden kuukauden aikana sattuu kolme tulipaloa.

   Mallivastaus: Odotusarvona kuukauden aikana sattuvien tulipalojen määrälle pidetään lukua $\lambda = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \approx 1,66$. Tällöin $\mathbb{P}(X = 3) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^3}{3!} \approx 0,146$.

2. Kaivovettä pidetään juomakelpoisena, mikäli kolibakteereja esiintyy 100 pmy/100 ml.[1] Jos 10 ml näytteestä löytyy 14 pmy kolibakteeria, mikä on todennäköisyys sille, että kaivovesi on juomakelpoista? Käytä Poissonin jakaumaa arviointiin.

   Mallivastaus: Odotusarvona juomakelpoisen veden kolibakteerimäärälle pidetään $\lambda = 10$ pmy/10 ml. Todennäköisyys sille, että juomakelpoisen veden 10 ml näytteestä löytyy 14 pmy kolibakteereja, on

$$\mathbb{P}(X = 14) = e^{-10}\frac{10^{14}}{14!} \approx 0.05.$$

   Huomautus: Juomakelpoisena pidetään tietysti myös sellaista vettä, jos kolibakteereja on vähemmän kuin 100 pmy/100 ml. Todenäköisyys että tällaisesta vedestä saadaan tehtävässä mainittu näyte on vieläkin pienempi kuin tehtävän vastaus.

3. Yrityksen asiakaspalveluun saapuu puhelu keskimäärin joka 15. minuutti, ja puhelujen väliajat noudattavat eksponenttijakaumaa.

   a) Määritä parametri v tiheysfunktiolle $f(t) = ve^{-vt}$. Ajan yksikkönä käytetään minuuttia.

   b) Mikä on todennäköisyys sille, että äsken saapuneen puhelun jälkeen seuraava saapuu aikaisintaan 20 minuutin päästä?

   c) Jos aiempi puhelu saapui 10 minuuttia sitten, mikä on todennäköisyys sille, että seuraava saapuu aikaisintaan 15 minuutin päästä?

   Mallivastaus: a) $v = \frac{1}{15} \approx 0,0667$.

   b) $\mathbb{P}(T \geq 20) = 1 - \mathbb{P}(T < 20) = 1 - (1 - e^{-v \cdot 20}) = e^{-\frac{20}{15}} = 0,263597\ldots$

   c) Eksponenttijakauman muistittomuusominaisuuden perusteella

$$\mathbb{P}(T > 15 + 10 \mid T > 10) = \mathbb{P}(T > 15) = e^{-\frac{15}{15}} = 0,367879\ldots$$

4. Yritys valmistaa Led-lamppuja, joiden kestoikä on likimain normaalisti jakautunut, odotusarvon ollessa $\mu = 25000$ ja keskihajonnan $\sigma = 3000$ (aikayksikkönä tunti).

   a) Millä todennäköisyydellä lamppu kestää yli 35000 tuntia?

   b) Millä todennäköisyydellä lamppu kestää alle 20000 tuntia?

   c) Mikä on kestoaika, jonka ylittää vain 1% lampuista?

   Ohje c)-kohtaa varten: Matlabissa standardoidun normaalijakauman kertymäfuntion käänteisfunktio saadaan muodossa `norminv(p)`.

[1] pmy=pesäkettä muodostava yksikkö

Mallivastaus: a) $\mathbb{P}(T > 35000) = 1 - \mathbb{P}(T \leq 35000) = 1 - \Phi(\frac{35000-25000}{3000}) = 0,00042906\ldots$.

b) $\mathbb{P}(T \leq 20000) = \Phi(\frac{20000-25000}{3000}) = 0.0477904\ldots$

c) Olkoon t kysytty kestoaika. Koska $\mathbb{P}(T > t) = 1 - \mathbb{P}(T \leq t) = 1 - \Phi(\frac{t-25000}{3000})$, on selvitettävä millä t:n arvolla

$$
\begin{aligned}
& 1 - \Phi(\frac{t-25000}{3000}) = \frac{1}{100} \\
\Leftrightarrow\quad & \Phi(\frac{t-25000}{3000}) = \frac{99}{100} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{t-25000}{3000} = \Phi^{-1}(\frac{99}{100}) \\
\Leftrightarrow\quad & t = 3000 \cdot \Phi^{-1}(\frac{99}{100}) + 25000 \approx 31979
\end{aligned}
$$

5. Oletetaan tunnetuksi, että riippumattomille satunnaismuuttujille X ja Y pätee $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Miten tästä seuraa, että riippumattomille satunnaismuuttujille $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$?

   Mallivastaus:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathbb{E}((X+Y)^2) - \mathbb{E}(X+Y)^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2) - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(X)^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 \\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).
\end{aligned}
$$

6. Olkoon X normaalijakautuman $N(\mu, \sigma^2)$ mukainen satunnaismuuttuja. Määritä todennäköisyydet $\mathbb{P}(|X-\mu| > 3\sigma)$ ja $\mathbb{P}(|X-\mu| > 5\sigma)$.

   Ohje: $\mathbb{P}(|X-\mu| \leq a) = \mathbb{P}(-a+\mu \leq X < a+\mu)$.

   Mallivastaus: Merkitään normaalijakauman $N(\mu, \sigma^2)$ kertymäfunktiota $F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X-\mu| \leq 3\sigma) &= \mathbb{P}(-3\sigma+\mu \leq X \leq 3\sigma+\mu) = F(3\sigma+\mu) - F(-3\sigma+\mu) \\
&= \Phi(\frac{3\sigma+\mu-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{-3\sigma+\mu-\mu}{\sigma}) \\
&= \Phi(3) - \Phi(-3) = 0.9973002039\ldots.
\end{aligned}
$$

   Tällöin

$$\mathbb{P}(|X-\mu| > 3\sigma) = 1 - \mathbb{P}(|X-\mu| > 3\sigma) = 0.002699796063\ldots$$

   Samoin

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \leq 5\sigma) = \Phi(5) - \Phi(-5) = 0.9999994267\ldots,$$

   josta

$$\mathbb{P}(|X-\mu| > 5\sigma) = 1 - \mathbb{P}(|X-\mu| \leq 5\sigma) = 0.0000005733031438\ldots \approx 5.7 \cdot 10^{-7}$$

7. Kun heitetään noppaa 1000 kertaa, saadaan 250 kertaa silmäluku 6. Arvioi tällaisen tapahtuman todennäköisyyttä olettaen että kaikki silmäluvut esiintyvät yhtä todennäköisesti.

Ohje: Mieti aluksi onko todennäköisyyttä helpompi arvioida binomijakauman vai keskeisen raja-arvolauseen avulla.

Mallivastaus: Tehtävässä lienee helpointa käyttää binomitodennäköisyyttä. Jos satunnaismuuttuja X merkitsee silmälukujen 6 määrää, on

$$\mathbb{P}(X = 250) = \binom{1000}{250}\left(\frac{1}{6}\right)^{250}\left(\frac{5}{6}\right)^{1000-250} = 5,74852 \cdot 10^{-12}$$

8. Merkitään klaavaa 1:llä ja kruunaa 2:lle painottamattoman kolikon heitossa. Kun kolikkoa heitetään n kertaa. Olkoon X_i i:nnen heiton tulos (joko 1 tai 2) sekä $\overline{X}_n$ kaikkien heittojen tulosten otoskeskiarvo. Käytä suurten lukujen lakia selvittääksesi kuinka monta heittoa n tarvitaan, että $\mathbb{P}(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n)\right| < 0.1) \geq 0.999$

   Mallivastaus: Odotusarvo $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{3}{2}$, $\mathbb{E}(X_i^2) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 2^2 = \frac{5}{2}$, ja $\mathrm{Var}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 = \frac{5}{2} - (\frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

   Tällöin $\mathbb{E}(\overline{X_n}) = \frac{3}{2}$ ja suurten lukujen lain mukaan

$$\mathbb{P}(\left|\overline{X}_n - \frac{3}{2}\right| < 0.1) \geq 1 - \frac{1/4}{n \cdot 0.1^2}.$$

   Tällöin ratkaistavaksi jää epäyhtälö

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1/4}{n \cdot 0.1^2} &\geq 0.999 \\ \Leftrightarrow \quad n &\geq \frac{1/4}{0.1^5} = 25000. \end{aligned}$$

9. Hyllyissä on tilaa kirjoille yhteensä 120 m. Yhden kirjan paksuus on keskimäärin $\mu = 2$ cm ja paksuuden keskihajonta $\sigma = 0,6$ cm. Arvioi millä todennäköisyydellä 5800 kirjaa ei mahdu hyllyihin.

   Ohje: Jos X_i on kirjan i paksuus, on yhteispaksuus $X_1 + \ldots + X_{5800}$. Käytä keskeistä raja-arvolausetta.

   Mallivastaus: Merkitään $P = X_1 + \ldots + X_{5800}$ (yhteispaksuus, metreinä) on $\mathbb{E}(P) = 5800 \cdot 0.02 = 116$ ja $\mathrm{Var}(P) = 5800 \cdot 0.006^2 = 0.2088$. Tällöin

$$\mathbb{P}(P > 120) = 1 - \mathbb{P}(P \leq 120) \approx 1 - \Phi(\frac{120 - 116}{0.006\sqrt{5800}}) \approx 0.$$