Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Kertausta

Kertoma

$$0! = 1, n! = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Kertoma $n!$ ilmaisee kuinka monella tavalla n erilaista alkiota voidaan järjestää jonoon (järjestettu otanta palauttamatta).

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Binomikerroin $\binom{n}{k}$ (n yli k:n) ilmaisee kuinka monella tavalla k alkiota voidaan valita n:n alkion joukosta kun järjestystä ei huomioida (Järjestämätön otanta palauttamatta).

Otanta

Järjestetty

- Palauttamatta: $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
- Palauttaen: n^k

Järjestämätön

- Palauttamatta: $\binom{n}{k}$
- Palauttaen $\binom{k+n+1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$

Ehdollinen todennäköisyys

Määritelmä

Ehdollinen todennäköisyys $\mathbb{P}(A \mid B)$ tarkoittaa todennäköisyyttä, jolla A tapahtuu, kun tiedetään, että B on tapahtunut.

Esimerkki

Jos tiedetään, että nopanheitossa tulos on parillinen, niin nelosen todennäköisyys on $\frac{1}{3}$. Jos taas tiedetään, että tulos on pariton, on nelosen todennäköisyys 0.

Määritelmä

Jos $\mathbb{P}(B) > 0$, on

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Ehdollinen todennäköisyys

Huomautus

- $0 \leq \mathbb{P}(A \mid B) \leq 1$
- $\mathbb{P}(A \mid B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A} \mid B)$

Esimerkki

Esimerkit 1.18 ja 1.19

Bayesin lause

Muista:

Jos $\mathbb{P}(B) > 0$, on
$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Bayesin lause

Jos $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B) > 0$, on
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A \mid B)$$

Huomautus

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(C \mid A \cap B).$$

Kokonaistodennäköisyys

Muista:

Tapaukset A_1, A_2, ..., A_n ovat toisensa poissulkevat, jos $A_i \cap A_j = \emptyset$ aina, kun $i \neq j$. Tällöin

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n).$$

Kokonaistodennäköisyys

Oletetaan, että A_1, A_2, ..., A_n ovat toisensa poissulkevat ja $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Jos $B \subset \Omega$, ovat myös $B \cap A_i$ toisensa poissulkevat ja

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup \ldots \cup (B \cap A_n).$$

Tästä

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

Bayesin lause

Erikoistapaus (kokonaistodennäköisyys)

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \mid \overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})$$

Määritelmä

Jos

$$\Omega = A_1 \cup \ldots \cup A_n \quad \text{ja} \quad A_i \cap A_j = \emptyset,$$

sanotaan, että tapaukset $A_1, \ldots, A_n$ muodostavat otosavaruuden Ω *partition*.

Bayesin lause (yleistys)

$$\mathbb{P}(A_k \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A_k \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$

Esimerkki

Kahdella ihmisellä 10 000:sta on virustartunta. Tartunnan saaneilla ihmisillä testi ilmoittaa 99,99% todennäköisyydellä tartunnasta, kun taas niillä joilla ei ole tartuntaa, testi ilmoittaa sen 99,9% todennäköisyydellä.

Tartunnan todennäköisyys positiivisen testituloksen saaneille voidaan laskea seuraavasti: Merkitään tapauksia T (tartunta), E (ei tartuntaa), P (positiivinen testitulos) ja N (negatiivinen testitulos). Tällöin siis $\mathbb{P}(T) = 0,0002$, $\mathbb{P}(E) = 0,9998$, $\mathbb{P}(P \mid T) = 0,9999$, $\mathbb{P}(N \mid T) = 0,0001$, $\mathbb{P}(P \mid E) = 0,001$ ja $\mathbb{P}(N \mid E) = 0,999$.