Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Bayesin lause

Oletetaan että tapaukset A_1, ..., A_n muodostavat otosavaruuden partition.

$$\mathbb{P}(A_k \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A_k \mid B) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B \mid A_k),$$

josta

$$\mathbb{P}(A_k \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B \mid A_k)}{\mathbb{P}(B)}$$

ja edelleen

$$\mathbb{P}(A_k \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$

Esimerkki

Kahdella ihmisellä 10 000:sta on virustartunta. Tartunnan saaneilla ihmisillä testi ilmoittaa 99,99% todennäköisyydellä tartunnasta, kun taas niillä joilla ei ole tartuntaa, testi ilmoittaa sen 99,9% todennäköisyydellä.
Tartunnan todennäköisyys positiivisen testituloksen saaneille voidaan laskea seuraavasti: Merkitään tapauksia T (tartunta), E (ei tartuntaa), P (positiivinen testitulos) ja N (negatiivinen testitulos). Tällöin siis $\mathbb{P}(T) = 0,0002$, $\mathbb{P}(E) = 0,9998$, $\mathbb{P}(P \mid T) = 0,9999$, $\mathbb{P}(N \mid T) = 0,0001$, $\mathbb{P}(P \mid E) = 0,001$ ja $\mathbb{P}(N \mid E) = 0,999$.

Esimerkki

Bayesin lauseen mukaan

$$\mathbb{P}(T \mid P) = \frac{\mathbb{P}(P \mid T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(P)}.$$

Koska

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(P) &= \mathbb{P}(P \mid T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(P \mid E)\mathbb{P}(E) \\ &= 0,9999 \cdot 0,0002 + 0,001 \cdot 0,9998 = 0,00119978, \end{aligned}$$

on

$$\mathbb{P}(T \mid P) = \frac{0,9999 \cdot 0,0002}{0,00119978} = 0,166681$$

Riippumattomuus

Riippumattomuus

Tapaukset A ja B ovat riippumattomat, jos $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Tämä on ekvivalentti ehtojen $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$ ja $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$ kanssa (jos $\mathbb{P}(A) > 0$ ja $\mathbb{P}(B) > 0$).

Määritelmä (useampi tapaus)

Tapaukset A_1, …, A_n ovat riippumattomat, jos

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\ldots\mathbb{P}(A_n)$$

Riippumattomuus

Huomautus

- Toisensa poissulkevat tapaukset ovat riippuvia: Jos toinen tapahtuu, ei toinen voi tapahtua (paitsi jos nollatodennäköisyys molemmilla).
- Riippumattomuudesta ei kuitenkaan seuraa poissulkevuus.
- Jos A ja B ovat riippumattomat, niin ovat myös A ja $\overline{B}$, kuin myös $\overline{A}$ ja B, sekä $\overline{A}$ ja $\overline{B}$.

Esimerkki

Kolme metsästäjää 1, 2 ja 3 ampuu samaa jänistä toisistaan riippumatta. 1. osuu todennäköisyydellä $0,05$, 2. $0,08$ ja 3. $0,01$. Olkoon A_i tapaus, että jänikseen osuu i laukausta, $0 \leq i \leq 3$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_0) &= \mathbb{P}(\overline{1} \cap \overline{2} \cap \overline{3}) = \mathbb{P}(\overline{1})\mathbb{P}(\overline{2})\mathbb{P}(\overline{3}) \\
&= 0,95 \cdot 0,92 \cdot 0,99 = 0,86526
\end{aligned}$$

(kukaan ei osu)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1) &= \mathbb{P}(1 \cap \overline{2} \cap \overline{3}) + \mathbb{P}(\overline{1} \cap 2 \cap \overline{3}) + \mathbb{P}(\overline{1} \cap \overline{2} \cap 3) \\
&= 0,05 \cdot 0,92 \cdot 0,99 + 0,95 \cdot 0,08 \cdot 0,99 \\
&\quad +0,95 \cdot 0,92 \cdot 0,01 = 0,12952
\end{aligned}$$

(yksi osuu)

Riippumattomuus

Toistokoe

Koe onnistuu todennäköisyydellä p ja sitä toistetaan riippumattomasti.

- Mikä on todennäköisyys, että $k-1$ ensimmäistä toistoa epäonnistuu ja k:s onnistuu?
- Mikä on todennäköisyys, että onnistuneiden kokeiden määrä on k, kun toistoja on n?
- Koetta toistetaan kunnes onnistumisia on n. Millä todennäköisyydellä toistoja tarvitaan $k \geq n$?

Esimerkki

Monty Hall Show

Kilpailija saa valita yhden kolmesta ovesta. Kahden oven takana on vuohi, yhden takana auto. Valinnan jälkeen juontaja avaa sellaisen oven, jota kilpailija ei valinnut ja jonka takana on vuohi. Tämän jälkeen kilpailija saa vaihtaa ovea. Kannattaako vaihto jos haluaa auton?

Määritelmä

Äärellisen (tai numeroituvan) joukon $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ todennäköisyysjakauma on funktio joka toteuttaa ehdot $f(x) \geq 0$ ja $\sum_{x \in X} f(x) = 1$. Tällöin sanotaan, että f on *diskreetti todennäköisyysjakauma* ja että satunnaismuuttuja X saa arvon x_i todennäköisyydellä $f(x_i)$.

Satunnaismuuttujat

Määritelmä

Jos $f(x) \geq 0$ ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1,$$

sanotaan että f on jatkuva todennäköisyysjakauma.

Määritelmä

Jatkuvaan jakaumaan f liittyvä satunnaismuuttuja X saa arvon välillä $[a, b]$ todennäköisyydellä

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Satunnaismuuttujat

Määritelmä

Satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

Vertaa:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{1}{n} + \ldots + x_n \cdot \frac{1}{n}$$

(tasainen diskreetti jakauma)

$$\mathbb{E}(X) = x_1 \cdot f(x_1) + x_2 \cdot f(x_2) + \ldots + x_n \cdot f(x_n)$$

(yleinen diskreetti jakauma)