

Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 1

Demonstraatio 1, 28.3.2024

1. Määritellään funktio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lausekkeella $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Hyväksytään luennolla mainittu sopimus, jonka mukaan funktio voi olla määritelty vain jossain joukon \mathbb{R}^2 osajoukossa. Missä joukossa tämä lauseke määrittelee funktion? Perustelee jollain luennolla esitetyllä tavalla, että edellisen tehtävän funktio on jatkuva määrittelyjoukossaan.
2. Olkoon f tehtävän 1 funktio. Selvitä mitä arvoa $f(x, y)$ lähestyy, kun origoa lähestytään suoraa $y = kx$ ($k \neq 0$) pitkin. Ohje: Sijoita $y = kx$ ja selvitä mitä tapahtuu, kun $x \rightarrow 0$. Mieti myös mitä suoria ei voi kattaa jos $k \neq 0$. Mitä voit tämän perusteella päätellä funktion f raja-arvosta kun $(x, y) \rightarrow (0, 0)$?
3. Olkoon f edelleen tehtävän 1 funktio. Selvitä mitä arvoa $f(x, y)$ lähestyy, kun origoa lähestytään paraabelia $y = kx^2$ pitkin. Mitä voit päätellä funktion f raja-arvosta, kun $(x, y) \rightarrow (0, 0)$?
4. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ määritelty lausekkeella $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$. Selvitä onko tällä funktiolla olemassa raja-arvoa $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.
5. Luennolla etsittiin funktiolle $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$ lineaarista approksimaatiota pisteen $(1, 2)$ ympäristössä ja saatiin

$$f(1 + h_1, 2 + h_2) - f(1, 2) = 2h_1 - 4h_2 + h_1^2 - h_2^2.$$

Osoita, että funktiolle $\epsilon(h_1, h_2) = \frac{1}{\|(h_1, h_2)\|} (h_1^2 - h_2^2)$ pätee

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \epsilon(h_1, h_2) = 0.$$

Ohje: On osoitettava, että etäisyys $d(\epsilon(h_1, h_2), 0)$ saadaan pieneksi, kun $d((h_1, h_2), (0, 0))$ tulee pieneksi. Voi olla helpompi tarkastella normin neliötä kuin normia.

6. Määritä funktiolle $f(x, y, z) = (-1 + 2z + xy, 2 + 2y - yz)$ lineaarinen approksimaatio pisteessä $(2, 1, 3)$ etsimällä lausekkeen

$$f(2 + h_1, 1 + h_2, 3 + h_3) - f(2, 1, 3)$$

lineaarinen (ensimmäisen asteen) osa.

7. Määritä tehtävän 1 funktiolle 1. kertaluvun osittaisderivaatat.
8. Määritä tehtävän 4 funktiolle 1. kertaluvun osittaisderivaatat.
9. Määritä funktion $f(x, y) = xy^2 + 4x^2y + 2xy$ kaikki ensimmäisen ja toisen kertaluvun osittaisderivaatat.