Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 1

Demonstraatio 1, 28.3.2024

1. Määritellään funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lausekkeella $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Hyväksytään luennolla mainittu sopimus, jonka mukaan funktio voi olla määritelty vain jossain joukon $\mathbb{R}^2$ osajoukossa. Missä joukossa tämä lauseke määrittelee funktion? Perustele jollain luennolla esitetyllä tavalla, että edellisen tehtävän funktio on jatkuva määrittelyjoukossaan

   Mallivastaus: Funktio on määritelty, kunhan määrittelevän lausekkeen nimittäjän ei ole nolla. $x^4 + y^2$ voi olla nolla ainoastaan kun $(x, y) = (0, 0)$, joten määrittelyjoukko on $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$.

   Lausekkeen osoittaja määrittelee jatkuvan funktio koko $\mathbb{R}^2$:ssa, koska se voidaan kirjoittaa muodossa $x^2 y = p_1(x, y) \cdot p_1(x, y) \cdot p_2(x, y)$. Tässä p_1 ja p_2 ovat projektiofunktioita (jatkuvia) ja luentomonisteen lauseen mukaan jatkuvien funktioiden tulo on jatkuva. Analogisesti voidaan perustella lausekkeen nimittäjän määrittelemän funktion jatkuvuus, ja väite seuraa luentomonisteen lauseesta, jonka mukaan jatkuvien funktioiden osamäärä on jatkuva sellaisessa joukossa, jossa ei ole nimittäjän nollakohtia.

2. Olkoon f tehtävän 1 funktio. Selvitä mitä arvoa $f(x, y)$ lähestyy, kun origoa lähestytään suoraa $y = kx$ $(k \neq 0)$ pitkin. Ohje: Sijoita $y = kx$ ja selvitä mitä tapahtuu, kun $x \to 0$. Mieti myös mitä suoria ei voi kattaa jos $k \neq 0$. Mitä voit tämän perusteella päätellä funktion f raja-arvosta kun $(x, y) \to (0, 0)$?

   Mallivastaus:
   $$f(x, kx) = \frac{x^2 \cdot kx}{x^4 + k^2 x^2} = \frac{x \cdot k}{x^2 + k^2} \xrightarrow{x \to 0} 0.$$

   Lähestymissuunnista jäävät tällä tavalla puuttumaan molemmat koordinaattiakselit $y = 0$ (x-akseli) ja $x = 0$ y-akseli. Toisaalta kun $x \neq 0$ on $f(x, 0) = \frac{0}{x^4} = 0 \xrightarrow{x \to 0} 0$ ja kun $y \neq 0$, on $f(0, y) = \frac{0}{y^2} = 0 \xrightarrow{y \to 0} 0$.

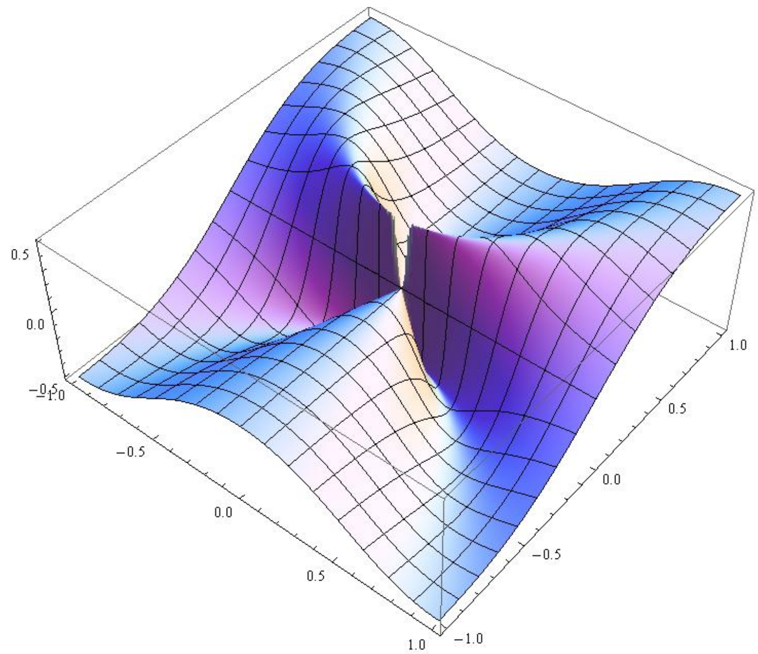
   Näiden perusteella ei kuitenkaan voi päätellä mitään funktion f raja-arvosta kun $(x, y) \to (0, 0)$.

3. Olkoon f edelleen tehtävän 1 funktio. Selvitä mitä arvoa $f(x, y)$ lähestyy, kun origoa lähestytään paraabelia $y = kx^2$ pitkin. Mitä voit päätellä funktion f raja-arvosta, kun $(x, y) \to (0, 0)$? Mallivastaus: Kun $x \neq 0$, on
   $$f(x, kx^2) = \frac{kx^4}{x^4 + k^2 x^4} = \frac{k}{1 + k^2}$$

   Jos esim. $k = 1$, lähestyy funktio arvoa $\frac{1}{2}$, ja jos $k = -1$, lähestyy funktio arvoa $-\frac{1}{2}$. Näin ollen raja-arvoa pisteessä $(0, 0)$ ei voi olla olemassa.

4. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ määritelty lausekkeella $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$. Selvitä onko tällä funktiolla olemassa raja-arvoa $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.

   Mallivastaus 1:
   $$d\left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, 0\right) = \left|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right| = \frac{\left|x^2\right| |y|}{||(x, y)||^2} \leq \frac{|x|^2 |y|}{|x|^2} = |y| \leq ||(x, y)|| = d((x, y), (0, 0)),$$



Kuva 1: Pinnan $z = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ kuvaaja. Kuvasta voi löytää paraabelien hahmot korkeuksilta $z = \pm\frac{1}{2}$.

mikä osoittaa, että $f(x,y) \to 0$, kun $(x,y) \to (0,0)$.

Mallivastaus 2: Käytetään napakoordinaatteja $x = r\cos\theta$ ja $y = r\sin\theta$, jolloin

$$f(x,y) = \frac{r^3\cos\theta\sin\theta}{r^2} = r\cos\theta\sin\theta \xrightarrow{r\to 0} 0.$$

Näin ollen kysytty raja-arvo on olemassa ja $= 0$.

5. Luennolla etsittiin funktiolle $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$ lineaarista approksimaatiota pisteen $(1,2)$ ympäristössä ja saatiin

$$f(1+h_1, 2+h_2) - f(1,2) = 2h_1 - 4h_2 + h_1^2 - h_2^2.$$

Osoita, että funktiolle $\epsilon(h_1,h_2) = \dfrac{1}{||(h_1,h_2)||}(h_1^2 - h_2^2)$ pätee

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \epsilon(h_1,h_2) = 0.$$

Ohje: On osoitettava, että etäisyys $d(\epsilon(h_1,h_2),0)$ saadaan pieneksi, kun $d((h_1,h_2),(0,0))$ tulee pieneksi. Voi olla helpompi tarkastella normin neliötä kuin normia.

Mallivastaus: Kolmioepäyhtälön perusteella

$$d(\epsilon(h_1,h_2),0) = \frac{\left|h_1^2 - h_2^2\right|}{||(h_1,h_2)||} \le \frac{h_1^2 + h_2^2}{||(h_1,h_2)||} = \frac{||(h_1,h_2)||^2}{||(h_1,h_2)||} = ||(h_1,h_2)|| = d((h_1,h_2),(0,0)).$$

Yhtälö-epäyhtälöketjun perusteella funktion ϵ arvo menee miten tahansa lähelle nolla, kunhan (h_1,h_2) valitaan riittävän läheltä origoa $(0,0)$.

6. Määritä funktiolle $f(x,y,z) = (-1 + 2z + xy, 2 + 2y - yz)$ lineaarinen approksimaatio pisteessä $(2,1,3)$ etsimällä lausekkeen

$$f(2+h_1, 1+h_2, 3+h_3) - f(2,1,3)$$

lineaarinen (ensimmäisen asteen) osa.

Mallivastaus:

$$\begin{aligned}
& f(2+h_1, 1+h_2, 3+h_3) - f(2,1,3) \\
= \; & (-1+2(3+h_3)+(2+h_1)(1+h_2), 2+2(1+h_2)-(1+h_2)(3+h_3)) - (7,1) \\
= \; & (h_1+2h_2+2h_3+h_1h_2, -h_2-h_3-h_2h_3) \\
= \; & (h_1+2h_2+2h_3, -h_2-h_3) + (h_1h_2, -h_2h_3).
\end{aligned}$$

7. Määritä tehtävän 1 funktiolle 1. kertaluvun osittaisderivaatat.

   Mallivastaus: f voidaan esittää muodossa

$$f(x,y) = x^2y(x^4+y^2)^{-1},$$

josta saadaan tulon derivointisääntöä käytämällä

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy(x^4+y^2)^{-1} + x^2y(-1)(x^4+y^2)^{-2}4x^3 = \frac{2xy(x^4+y^2)-4x^5y}{(x^4+y^2)^2} = \frac{-2x^5y+2xy^3}{(x^4+y^2)^2},$$

ja

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2(x^4+y^2)^{-1} + x^2y(-1)(x^4+y^2)^{-2}2y = \frac{x^2(x^4+y^2)-2x^2y^2}{(x^4+y^2)^2} = \frac{x^6-x^2y^2}{(x^4+y^2)^2}.$$

8. Määritä tehtävän 4 funktiolle 1. kertaluvun osittaisderivaatat.

   Mallivastaus: f voidaan esittää muodossa

$$f(x,y) = x^2y(x^2+y^2)^{-1},$$

josta tulon derivointisäännöllä saadaan

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy(x^2+y^2)^{-1} + x^2y(-1)(x^2+y^2)^{-2}2x = \frac{2xy(x^2+y^2)-2x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)},$$

ja

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2(x^2+y^2)^{-1} + x^2y(-1)(x^2+y^2)^{-2}2y = \frac{x^2(x^2+y^2)-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

9. Määritä funktion $f(x,y) = xy^2 + 4x^2y + 2xy$ kaikki ensimmäisen ja toisen kertaluvun osittaisderivaatat.

   Mallivastaus:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y + 8xy + y^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2 + 8x + 2y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 4x^2 + 2xy$$

ja

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2 + 8x + 2y.$$