Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 1

Demonstraatio 2, 5.4.2024

1. Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (-1 + 2z + xy, 2 + 2y - yz)$. Määritä funktion funktion f Jacobin matriisi käyttämällä osittaisderivaattoja ja tarkista minkälainen siitä tulee, kun sijoitetaan $(x, y, z) = (2, 1, 3)$. Miten tulos sopii edellisen demokerran tehtävään 6?

2. Määritellään funktio $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lausekkeella $f(x, y, z) = 5xyz - 3x^2z + 3xyz^2$. Arvioi kokonaisdifferentiaalia käyttämällä kuinka paljon funktion f arvo pisteessä $(1, 3, -2)$ muuttuu, mikäli x, y ja z-koordinaateille sallitaan poikkeamat $|dx| \leq 0.1$, $|dy| \leq 0.3$ ja $|dz| \leq 0.2$.

3. Laske funktion $f(x, y, z) = 2xy^2 - 2xyz - 3xz^2$ suunnattu derivaatta vektorin $\boldsymbol{u} = (1, 3, -2)$ suuntaan. Mihin suuntaan pisteestä $(2, 1, 1)$ pitäisi siirtyä, jotta funktion arvo kasvaisi nopeimmin ja mikä on suunnatun derivaatan arvo nopeimman kasvun suuntaan?

4. Tee sijoitus $u = x + y$ ja $v = x - y$ ja kirjoita osittaisdifferentiaaliyhtälö

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = x + y$$

   muuttujien u ja v osittaisdifferentiaaliyhtälöksi, ts. osittaisdifferentiaaliyhtälöksi jossa alkuperäisten osittaisderivaattojen sijasta esiintyvät $\frac{\partial f}{\partial u}$ ja $\frac{\partial f}{\partial v}$. Ohje: käytä ketjusääntöä ja esitä sen avulla $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$. Voit käyttää luennolla esitettyä menettelytapaa. Osaatko sijoituksen jälkeen ratkaista yhtälön?

5. Positiivisen pistevarauksen muodostama sähkökenttä suuntautuu suoraviivaisesti pisteestä poispäin kaikkiin suuntiin, mutta heikkenee kääntäen verrannollisesti etäisyyden neliöön.

   Muodosta matemaattinen malli origoon sijoitetun positiivisen pistevarauksen sähkökentälle $f(x, y, z)$ ja laske $\nabla \cdot f$, kun $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Fysikaaliset vakiot sivuutetaan. Tulkitse lopuksi miten tulos vertautuu divergenssin edustamaan ”lähteisyyteen”.

   Ohje: Pisteeseen (x, y, z) liitettävä vektori on tämän suuntainen, mutta pistettä (x, y, z) vastaava yksikkövektori on $\frac{1}{||(x,y,z)||}(x, y, z)$. Jos halutaan tämän heikkenevän suhteessa etäisyyden neliöön, pitää ko. yksikkövektori kertoa vielä tekijällä $\frac{1}{||(x,y,z)||^2}$.

   (Osittainen vastaus: $f(x, y, z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, z)$)

6. Vektorikenttä $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on *pyörteetön*, jos $\nabla \times f = \mathbf{0}$. Onko vektorikenttä $f(x, y, z) = (x + yz^2, -xz + y, xz + y^2)$ pyörteetön?

7. Muodosta matemaattinen malli vektorikentästä f, joka muodostaa pyörteen kolmiulotteisessa avaruudessa z-akselin ympäri. Ohje: mieti millainen vektori (x, y)-tasossa olisi aina *kohtisuorassa* paikkavektoria (x, y) vastaan, ja lisää z-komponentti. Laske lopuksi $\nabla \times f$ ja tulkitse tulosta.

   Ohje: Kohtisuoruus merkitsee sitä, että sisätulo on nolla. Millaisen vektorin sisätulo vektorin (x, y) kanssa olisi nolla. Lisää myös z-koordinaatti. Osittainen vastaus: $f(x, y, z) = (-y, x, z)$

8. Vektorikenttä $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on *konservatiivinen*, jos f on jonkin skalaarikentän $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gradientti, siis $f = \nabla\phi$. Osoita suoraan laskemalla, että konservatiivinen vektorikenttä on pyörteetön, mikäli funktion ϕ toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Ohje: Jos toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia, voidaan osittaisderivoinnin järjestys vaihtaa.

9. Onko tehtävän 5 vektorikenttä konservatiivinen? Jos on, mikä on funktio ϕ, jolle $f = \nabla\phi$? Ohje: Yritä ensin ratkaista yhtälö

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

integroimalla x:n suhteen.