Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 1

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Osittaisderivaatta

Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ osittaisderivaatta i:nnen muuttujan x_i suhteen pisteessä $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ on

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h}.$$

Muut merkinnät: $f_{x_i}(\boldsymbol{a})$ ja $D_{x_i} f(\boldsymbol{a})$. Jos muuttujien x_1, x_2, ..., x_n järjestys on kiinnitetty, niin myös merkintää $D_i f(\boldsymbol{a})$ käytetään.

Huomautus

$(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, n_n) = \boldsymbol{a} + h\boldsymbol{e}_i$, joten

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{a})}{h}.$$

Usean muuttujan differentiaalilaskentaa

Huomautus

Merkintöjen $\frac{df}{dx}$ ja $\frac{\partial f}{\partial x}$ ero, kun $f(x, y) = x^2 + y^2$ ja $y = 3x^2$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = 2x + \frac{d}{dx}9x^4 = 2x + 36x^3$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x$$

Esimerkki

Jos $f(x,y) = x\sin(xy)$, on

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \sin(xy) + x\cos(xy)y,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) &= \cos(xy)x + x\cos(xy) - xy\sin(xy)x \\ &= 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy).\end{aligned}$$

Toisaalta

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x^2\cos(xy)$$

ja

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy).$$

Huomautus

On mahdollista että

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Lause

Jos toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia, niin

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a}).$$

Derivoituvuus

Reaalifunktion f derivoituvuus:

$$f(x+h) - f(x) = k \cdot h + h\epsilon(h),$$

missä $\epsilon(h) \xrightarrow{h \to 0} \epsilon(0) = 0$.

Määritelmä

Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on differentioituva pisteessä $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, jos

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = T\boldsymbol{h} + ||\boldsymbol{h}||\epsilon(\boldsymbol{h}),$$

missä $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus ja $\epsilon(\boldsymbol{h}) \xrightarrow{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \epsilon(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$.

Määritelmä

Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on differentioituva pisteessä $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, jos

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = T\boldsymbol{h} + ||\boldsymbol{h}||\epsilon(\boldsymbol{h}),$$

missä $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus ja $\epsilon(\boldsymbol{h}) \xrightarrow{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \epsilon(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$.

Määritelmä

Edellisen määritelmän mukaista lineaarikuvausta T sanotaan funktion f Fréchet'n derivaataksi pisteessä $\boldsymbol{x}$ ja merkitään $Df(\boldsymbol{x})$. Lineaarikuvauksen $Df(\boldsymbol{x})$ matriisia sanotaan Jacobin matriisiksi ja siitä käytetään merkintää $J_f(\boldsymbol{x})$.