Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 1

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Määritelmä

Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on differentioituva pisteessä $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, jos

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = T\boldsymbol{h} + ||\boldsymbol{h}||\epsilon(\boldsymbol{h}),$$

missä $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus ja $\epsilon(\boldsymbol{h}) \xrightarrow{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \epsilon(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$.

Määritelmä

Edellisen määritelmän mukaista lineaarikuvausta T sanotaan funktion f Fréchet'n derivaataksi pisteessä $\boldsymbol{x}$ ja merkitään $Df(\boldsymbol{x})$. Lineaarikuvauksen $Df(\boldsymbol{x})$ matriisia sanotaan Jacobin matriisiksi ja siitä käytetään merkintää $J_f(\boldsymbol{x})$.

Jacobin matriisi:

Jos valitaan erityisesti $\boldsymbol{h} = h\boldsymbol{e}_j$, saadaan

$$
\begin{aligned}
& f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{x}) = Th\boldsymbol{e}_j + ||h\boldsymbol{e}_j||\epsilon(h\boldsymbol{e}_j) \\
\Leftrightarrow \quad & f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{x}) = hT\boldsymbol{e}_j + |h|\,\epsilon(h\boldsymbol{e}_j) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{x})}{h} = T\boldsymbol{e}_j + \frac{|h|}{h}\epsilon(h\boldsymbol{e}_j),
\end{aligned}
$$

joten

$$
\frac{f_i(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_j) - f_i(\boldsymbol{x})}{h} = T_i\boldsymbol{e}_j + \frac{|h|}{h}\epsilon_i(h\boldsymbol{e}_j)
$$

josta seuraa

Lause

$$
J_f(\boldsymbol{x})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})
$$

Differentiotuvuus

Huomautus:

Jos $f = (f_1, \ldots, f_m)$ on differentioituva jossain pisteessä, ovat kaikki osittaisderivaatat $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ myös olemassa. Käänteinen tulos ei välttämättä pidä paikkansa.

Erikoistapaus

Lineaarikuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on muotoa

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = (a_1 \ldots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}.$$

Differentiotuvuus

Määritelmä

Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(1 \times n)$ Jacobin matriisia sanotaan *gradientiksi* ja merkitään $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$

Huomautus

Funktiolle $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) \approx \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{h}$

Huomautus

Funktiolle $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ on

$$J_f = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}$$

Differentiotuvuus

Tangenttitaso

Funktioille $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineaarikuvaus saa muodon

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (a \;\; b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by.$$

Tällöin siis differentioituvuus pisteessä $\boldsymbol{x}_0$ funktiolle $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = ah + bk + \epsilon(\boldsymbol{h})||\boldsymbol{h}||,$$

missä on merkitty $\boldsymbol{h} = (h, k)$. Jos edelleen merkitään $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)$, on

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah + bk + \epsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2},$$

missä $\epsilon(h, k) \to (0, 0)$ kun $(h, k) \to (0, 0)$.

Tangenttitaso

Toisin sanoen

$$z - z_0 \approx ah + bk.$$

Kun merkitään $(x, y) = (x_0 + h, y_0 + k)$, voidaan ylläoleva approksimaatio kirjoittaa muotoon

$$z - z_0 \approx a(x - x_0) + b(y - y_0).$$

Tasoa

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

sanotaan pinnan $z = f(x, y)$ *tangenttitasoksi* pisteessä (x_0, y_0).

Kokonaisdifferentiaali

- Merkitään $\boldsymbol{dx} = (dx_1, \ldots, dx_n)$
- $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{dx}) - f(\boldsymbol{x}) \approx \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{dx} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$
- Muutoksen $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{dx}) - f(\boldsymbol{x})$ lineaarista approksimaatiota

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

sanotaan kokonaisdifferentiaaliksi.

Esimerkki

Esimerkki 21

Suunnattu derivaatta

Olkoon $||\boldsymbol{u}|| = 1$. Tällöin

$$D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{x})) = \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u}.$$

Huomautus

Jos $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_j$, on

$$D_{\boldsymbol{e}_j} f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$$

Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö

Kaikille sisätuloille pätee

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 \leq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}),$$

jossa yhtäsuuruus on voimassa tarkalleen silloin kun $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ovat lineaarisesti riippuvia, siis $\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{y}$.

Seuraus

Erityisesti pistetulolle pätee

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq ||\boldsymbol{x}||||\boldsymbol{y}||,$$

jossa on yhtäsuuruus tarkalleen silloin kun $\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{y}$.

Seuraus

$$|D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{x})| = |\nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u}| \leq ||\nabla f(\boldsymbol{x})|| \cdot ||\boldsymbol{u}|| = ||\nabla f(\boldsymbol{x})||$$

ja yhtäsuuruus pätee tarkalleen silloin kun $\boldsymbol{u} = c\nabla f(\boldsymbol{x})$.

Johtopäätös

Differentioituva funktio muuttuu jyrkimmin gradientin osoittamassa suunnassa.

Johtopäätös

$\nabla f(x, y, x)$ on kohtisuorassa pintaa $f(x, y, z) = 0$ vastaan

Nabla operaattorina

Avaruudessa $\mathbb{R}^3$

- Nabla: $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$
- Skalaarikentän $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gradientti ∇f on vektorikenttä

$$\nabla f = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$$

- Vektorikentän $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ divergenssi $\nabla \cdot f$ on skalaarikenttä

$$\nabla \cdot f = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (f_1, f_2, f_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

Nabla operaattorina

Avaruudessa $\mathbb{R}^3$

- Vektorikentän $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pyörre $\nabla \times f$ on vektorikenttä

$$
\begin{aligned}
\nabla \times f &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_2 & f_3 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) - \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

Nabla operaattorina

Terminologia

$\nabla \times f$ tunnetaan perinteisesti nimellä *roottori*. Englanninkielinen vastine curl voisi suomeksi olla pöyrteisyys, kierre, kierteisyys, pyörrevirta, kurimus, syöveri, kiemura, kiehkura, jne.

Laplacen operaattori

$$\nabla^2 = (\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2})$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$