Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 1

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Määritelmä

Piste $\boldsymbol{a}$ on funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lokaali maksimi, jos on olemassa sellainen pisteen $\boldsymbol{a}$ ympäristö $B = B(\boldsymbol{a}, r)$, että $f(\boldsymbol{a}) > f(\boldsymbol{x})$ aina, kun $\boldsymbol{x} \in B$.
Samoin määritellään lokaali minimi. Yhteisnimitys: Lokaali ääriarvo.

Ääriarvot

Lause: Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lokaaleissa ääriarvopisteissä $\boldsymbol{a}$ on $\nabla f(\boldsymbol{a}) = 0$. Käsitteeseen liittyy että $\boldsymbol{a}$ ei ole tarkastelujoukon reunapiste.

Kriittinen piste

Piste $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ on funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kriittinen piste jos $\nabla f(\boldsymbol{a}) = 0$. Myös tässä oletetaan, että $\boldsymbol{a}$ ei ole tarkastelujoukon reunapiste.

Esimerkki 4.4.

(J.Lahtonen)

Ääriarvojen laatu

Vertaa:

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0)+f'(x_0)h+h\epsilon_1(h) \\ &= f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+h^2\epsilon_2(h) \end{aligned}$$

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0)+\nabla f(\boldsymbol{x}_0)\cdot \boldsymbol{h}+||\boldsymbol{h}||\epsilon_1(\boldsymbol{h})$$

Korkeamman asteen approksimaatiot?

Toisen asteen approksimaatio

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \nabla f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{h} + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}^T H_f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} + ||\boldsymbol{h}||^2 \epsilon_2(\boldsymbol{h}),$$

missä

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

on ns. Hessen matriisi. Joissain kirjoissa merkitään $H(\boldsymbol{x}_0) = \nabla^2 f(\boldsymbol{x}_0)$

Ääriarvojen laatu

Määritelmä

Matriisi H on

- Positiividefiniitti, jos $\boldsymbol{h}^T H \boldsymbol{h} > 0$ aina kun $\boldsymbol{h} \neq 0$
- Negatiividefiniitti, jos $\boldsymbol{h}^T H \boldsymbol{h} < 0$ aina kun $\boldsymbol{h} \neq 0$
- Indefiniitti, jos $\boldsymbol{h}^T H \boldsymbol{h}$ saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja.

Termit positiivi<u>semi</u>definiitti ja negatiivi<u>semi</u>definiitti tarkoittavat, että $\boldsymbol{h}^T H \boldsymbol{h}$ voi olla nolla vaikka $\boldsymbol{h} \neq 0$, mutta H ei ole indefiniitti.

Ääriarvojen laata

Lause

Jos funktion f kriittisessä pisteessä $\boldsymbol{x}_0$ Hessen matriisi $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ on

- positiividefiniitti, on piste lokaali minimi
- negatiividefiniitti, on piste lokaali maksimi
- indefiniitti, on piste satulapiste

Jos Hessen matriisi on semidefiniitti, ei ääriarvon laatu selviä tällä tavalla.

Todistuksen idea:

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \underbrace{\nabla f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{h}}_{0} + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}^T H_f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} + ||\boldsymbol{h}||^2 \epsilon_2(\boldsymbol{h}),$$

Ääriarvojen laatu

Definiittisyyden selvittäminen

Symmetrinen matriisi on diagonalisoituva
Sylvesterin kriteeri
Esimerkkejä