Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 1

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Lause

Jos funktion f kriittisessä pisteessä $\boldsymbol{x}_0$ Hessen matriisi $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ on

- positiividefiniitti, on piste lokaali minimi

Ääriarvojen laatu

Lause

Jos funktion f kriittisessä pisteessä $\boldsymbol{x}_0$ Hessen matriisi $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ on

- positiividefiniitti, on piste lokaali minimi
- negatiividefiniitti, on piste lokaali maksimi

Ääriarvojen laatu

Lause

Jos funktion f kriittisessä pisteessä $\boldsymbol{x}_0$ Hessen matriisi $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ on

- positiividefiniitti, on piste lokaali minimi
- negatiividefiniitti, on piste lokaali maksimi
- indefiniitti, on piste satulapiste

Lause

Jos funktion f kriittisessä pisteessä $\boldsymbol{x}_0$ Hessen matriisi $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ on

- positiividefiniitti, on piste lokaali minimi
- negatiividefiniitti, on piste lokaali maksimi
- indefiniitti, on piste satulapiste

Jos Hessen matriisi on semidefiniitti, ei ääriarvon laatu selviä tällä tavalla.

Todistuksen idea:

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \underbrace{\nabla f(\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{h}}_{0} + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}^T H_f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} + ||\boldsymbol{h}||^2\epsilon_2(\boldsymbol{h})$$

Ääriarvojen laatu

Lause

Jos funktion f kriittisessä pisteessä $\boldsymbol{x}_0$ Hessen matriisi $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ on

- positiividefiniitti, on piste lokaali minimi
- negatiividefiniitti, on piste lokaali maksimi
- indefiniitti, on piste satulapiste

Jos Hessen matriisi on semidefiniitti, ei ääriarvon laatu selviä tällä tavalla.

Todistuksen idea:

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \underbrace{\nabla f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{h}}_{0} + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}^T H_f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} + ||\boldsymbol{h}||^2 \epsilon_2(\boldsymbol{h}),$$

Ääriarvojen laatu

Definiittisyyden selvittäminen

Symmetrinen matriisi on diagonalisoituva

Definiittisyyden selvittäminen

Symmetrinen matriisi on diagonalisoituva

Sylvesterin kriteeri

Ääriarvojen laatu

Definiittisyyden selvittäminen

Symmetrinen matriisi on diagonalisoituva
Sylvesterin kriteeri
Esimerkkejä

Implisiittifunktiolause

Avaruudessa $\mathbb{R}^2$

Jos $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ja sen osittaisderivaatat ovat jatkuvia ja $G(x_0, y_0) = 0$ sekä $\frac{\partial}{\partial y} G(x_0, y_0) \neq 0$, niin on olemassa funktio f, jonka derivaatta on jatkuva ja pisteen (x_0, y_0) sisältävä suorakulmio, jossa $G(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$.

Implisiittifunktiolause

Avaruudessa $\mathbb{R}^2$

Jos $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ja sen osittaisderivaatat ovat jatkuvia ja $G(x_0, y_0) = 0$ sekä $\frac{\partial}{\partial y} G(x_0, y_0) \neq 0$, niin on olemassa funktio f, jonka derivaatta on jatkuva ja pisteen (x_0, y_0) sisältävä suorakulmio, jossa $G(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$.
Lisäksi
$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} G(x_0, y_0)}{\frac{\partial}{\partial y} G(x_0, y_0)}$$

Implisiittifunktiolause

Avaruudessa $\mathbb{R}^n$

Jos $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ja sen osittaisderivaatat ovat jatkuvia ja $G(\boldsymbol{x}_0) = 0$ sekä $\frac{\partial}{\partial x_j} G(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$, niin on olemassa differentioituva funktio g ja pisteen $\boldsymbol{x}_0$ sisältävä suorakulmio, jossa $G(\boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow x_j = g(x_1, \ldots, x_{j-i}, x_{j+1}, \ldots x_n)$

Implisiittifunktiolause

Avaruudessa $\mathbb{R}^n$

Jos $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ja sen osittaisderivaatat ovat jatkuvia ja $G(\boldsymbol{x}_0) = 0$ sekä $\frac{\partial}{\partial x_j} G(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$, niin on olemassa differentioituva funktio g ja pisteen $\boldsymbol{x}_0$ sisältävä suorakulmio, jossa $G(\boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow x_j = g(x_1, \ldots, x_{j-i}, x_{j+1}, \ldots x_n)$ Lisäksi

$$\frac{\partial g}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x_k} G}{\frac{\partial}{\partial x_j} G}$$

Implisiittifunktiolause

Avaruudessa $\mathbb{R}^n$

Jos $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ja sen osittaisderivaatat ovat jatkuvia ja $G(\boldsymbol{x}_0) = 0$ sekä $\frac{\partial}{\partial x_j} G(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$, niin on olemassa differentioituva funktio g ja pisteen $\boldsymbol{x}_0$ sisältävä suorakulmio, jossa $G(\boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow x_j = g(x_1, \ldots, x_{j-i}, x_{j+1}, \ldots x_n)$ Lisäksi

$$\frac{\partial g}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x_k} G}{\frac{\partial}{\partial x_j} G}$$

Toisin: Jos jokin gradientin ∇G koordinaateista $\frac{\partial G}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)$ on $\neq 0$, voidaan G:n j:s koordinaatti esittää muiden differentioituvana funktiona pisteen $\boldsymbol{x}_0$ sisältävässä suorakulmiossa

Implisiittifunktiolause

Avaruudessa $\mathbb{R}^n$

Jos $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ja sen osittaisderivaatat ovat jatkuvia ja $G(\boldsymbol{x}_0) = 0$ sekä $\frac{\partial}{\partial x_j} G(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$, niin on olemassa differentioituva funktio g ja pisteen $\boldsymbol{x}_0$ sisältävä suorakulmio, jossa $G(\boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow x_j = g(x_1, \ldots, x_{j-i}, x_{j+1}, \ldots x_n)$ Lisäksi

$$\frac{\partial g}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x_k} G}{\frac{\partial}{\partial x_j} G}$$

Toisin: Jos jokin gradientin ∇G koordinaateista $\frac{\partial G}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)$ on $\neq 0$, voidaan G:n j:s koordinaatti esittää muiden differentioituvana funktiona pisteen $\boldsymbol{x}_0$ sisältävässä suorakulmiossa

Määritelmä

Joukko $S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid G(\boldsymbol{x}) = 0\}$ on *säännöllinen (sileä)* pisteessä $\boldsymbol{a} \in S$, jos $\nabla G(\boldsymbol{a}) \neq 0$.

Tangenttiavaruus

Huom. ∇G on kohtisuorassa pintaan $G(\boldsymbol{x}) = 0$ nähden.

Tangenttiavaruus

Huom. ∇G on kohtisuorassa pintaan $G(\boldsymbol{x}) = 0$ nähden.

Määritelmä

Pinnan $S = \{\boldsymbol{x} \mid G(\boldsymbol{x}) = 0\}$ *tangenttiavaruus* T pisteessä $\boldsymbol{a}$ koostuu niistä vektoreista $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$, jotka ovat kohtisuorassa gradienttiin $\nabla G(\boldsymbol{a})$, nähden:

$$T = \{\boldsymbol{x} \mid \nabla G(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = 0\}.$$

Esimerkki 4.26

(J. Lahtonen)

Esimerkki 4.26

(J. Lahtonen)

Yksi side-ehto

Pinnan $G(\boldsymbol{x}) = 0$ säännöllisissä pisteissä funktion f ääriarvo toteuttaa yhtälön

$$\nabla f = \lambda \nabla G$$

Esimerkki 4.26

(J. Lahtonen)

Yksi side-ehto

Pinnan $G(\boldsymbol{x}) = 0$ säännöllisissä pisteissä funktion f ääriarvo toteuttaa yhtälön

$$\nabla f = \lambda \nabla G$$

Monta side-ehtoa

Ehdot $G_1(\boldsymbol{x}) = 0, \ldots, G_m(\boldsymbol{x}) = 0$ voidaan koota yhdeksi funktioksi

$$G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, G(\boldsymbol{x}) = (G_1(\boldsymbol{x}), \ldots, G_m(\boldsymbol{x}))$$

ja side-ehdot yhdessä: $G(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$

Säännöllisyys

Voidaanko monta muuttujaa ”ratkaista” muiden avulla ?

Säännöllisyys

Voidaanko monta muuttujaa "ratkaista" muiden avulla ?
Mietintöä varten korvataan G Frechet'n derivaatalla DG jossakin pisteessä.

Säännöllisyys

Voidaanko monta muuttujaa "ratkaista" muiden avulla ? Mietintöä varten korvataan G Frechet'n derivaatalla DG jossakin pisteessä. Tätä edustaa Jacobin matriisi

$$J_G = \begin{pmatrix} \nabla G_1 \\ \vdots \\ \nabla G_m \end{pmatrix}$$

ja tarkastellaan yhtälön $G(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ sijasta yhtälöä

$$J_G \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Lineaarinen yhtälöryhmä

Olkoon $m < n$. Jos A on $m \times n$ matriisi, millainen on yhtälöryhmän

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{21} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ A_{m1} & A_{n2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ratkaisujoukko?

Lineaarinen yhtälöryhmä

Olkoon $m < n$. Jos A on $m \times n$ matriisi, millainen on yhtälöryhmän

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{21} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ A_{m1} & A_{n2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ratkaisujoukko? m yhtälöä n, muuttujaa.

Sidotut ääriarvot

Lineaarinen yhtälöryhmä

Olkoon $m < n$. Jos A on $m \times n$ matriisi, millainen on yhtälöryhmän

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{21} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ A_{m1} & A_{n2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ratkaisujoukko? m yhtälöä n, muuttujaa. Milloin voidaan $n - m$ muuttujaa esittää m muuttujan avulla?

Lineaarinen yhtälöryhmä

Olkoon $m < n$. Jos A on $m \times n$ matriisi, millainen on yhtälöryhmän

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{21} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ A_{m1} & A_{n2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ratkaisujoukko? m yhtälöä n, muuttujaa. Milloin voidaan $n - m$ muuttujaa esittää m muuttujan avulla?
Vastaus: Kun matriisi on täysiasteinen $\Leftrightarrow$ matriisin rivit tai sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat.

Sidotut ääriarvot

Määritelmä

$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m$ on funktion $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *säännöllinen piste*, jos Jacobin matriisi $J_G(\boldsymbol{a})$ on täysiasteinen.

Määritelmä

$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m$ on funktion $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *säännöllinen piste*, jos Jacobin matriisi $J_G(\boldsymbol{a})$ on täysiasteinen.

Lause (Lagrangen kertoimet)

Jos funktioiden $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ja $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ osittaisderivaatat ovat jatkuvia, ja piste $\boldsymbol{a}$ on funktion f ääriarvo joukossa $\{\boldsymbol{x} \mid G(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}$ ja $\boldsymbol{a}$ on G:n säännöllinen piste, niin tällöin on olemassa vakiot $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ joille pätee

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \lambda_1 \nabla G_1(\boldsymbol{a}) + \ldots + \lambda_m \nabla G_m(\boldsymbol{a}).$$