# Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 2

**Demonstraatio 1, 18.4.2024**

1. Olkoon $A$ avaruuden $\mathbb{R}^2$ suorakulmio $A = [0,2] \times [-1,1]$. Laske integraali
$$\int_A (x^2 - xy + 3y^2)\, d\boldsymbol{x}$$
kahdella eri tavalla.

2. Epähomogeenisen kappaleen massa saadaan integraalina
$$m = \int_V \rho(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x},$$
missä $\rho(\boldsymbol{x})$ on kappaleen tiheys pisteessä $\boldsymbol{x}$. Oletetaan, että särmiön muotoisen kappaleen $[0,2] \times [0,4] \times [0,5]$ tiheys määräytyy funktion $\rho(x,y,z) = 1 + x + 2y + 3z$ mukaisesti. Määritä kappaleen massa.

3. Olkoon $A$ tason $\mathbb{R}^2$ alue, jota rajoittavat $x$-akseli, suora $x = 1$ ja käyrä $y = x^2$. Laske integraali
$$\int_A (x + y)\, d\boldsymbol{x}.$$

4. Laske integraali
$$\int_{y=0}^{1} \int_{x=y}^{1} e^{-x^2}\, dx\, dy$$
vaihtamalla ensin integrointijärjestys. Selvitä aluksi mikä on alue, jonka yli integroidaan.

5. Kappaletta $V$ rajoittavat $xy$, $xz$ ja $yz$-tasot sekä tasot $2x + y = 2$ ja $z = 1 + y$. Laske kappaleen tilavuus.

6. Laske
$$\int_A \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\, d\boldsymbol{x},$$
missä $A$ on tason $\mathbb{R}^2$ origokeskisen yksikköympyrän osa, jossa $x \geq 0$, $y \geq 0$ (tason I neljännes). Ohje: Käytä napakoordinaatteja.

7. Laske
$$\int_{y=0}^{\sqrt{3}} \int_{x=\frac{y}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{4-y^2}} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy.$$
Ohje: Selvitä aluksi mikä on integrointialue ja käytä sitten napakoordinaatteja.

8. Laske sen kappaleen tilavuus, jonka lieriö $x^2 + y^2 = 1$ leikkaa pallosta $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Ohje: Symmetrian vuoksi voit laskea sen kahdeksasosan tilavuuden, jossa $x$, $y$, $z \geq 0$. Laske aluksi sisin integraali $z$:n suhteen ja käytä $xy$-koordinaattien sijaan napakoordinaatteja.

9. Laske integraali
$$\int_{x=0}^{\frac{1}{2}} \int_{y=x}^{1-x} \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 dy\, dx.$$
Ohje: Sijoita $x = \frac{1}{2}(r-s)$, $y = \frac{1}{2}(r+s)$, piirrä alue uusien rajojen selvittämiseksi ja laske sijoitusfunktion Jacobin matriisin determinantti