Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 2

Demonstraatio 1, 18.4.2024

1. Olkoon A avaruuden $\mathbb{R}^2$ suorakulmio $A = [0,2] \times [-1,1]$. Laske integraali

$$\int_A (x^2 - xy + 3y^2)\, d\boldsymbol{x}$$

kahdella eri tavalla.

Mallivastaus: Tapa 1:

$$\begin{aligned}
& \int_{x=0}^{2} \int_{y=-1}^{1} (x^2 - xy + 3y^2)\, dy\, dx \\
= & \int_{x=0}^{2} \Big/_{y=-1}^{1} (x^2 y - \frac{1}{2}xy^2 + y^3)\, dx \\
= & \int_{x=0}^{2} \Big((x^2 - \frac{1}{2}x + 1) - (-x^2 - \frac{1}{2}x - 1)\Big)\, dx \\
= & \int_{x=0}^{2} (2x^2 + 2)\, dx = \Big/_{0}^{2} (\frac{2}{3}x^3 + 2x) = \frac{28}{3}
\end{aligned}$$

Tapa 2:

$$\begin{aligned}
& \int_{y=-1}^{1} \int_{x=0}^{2} (x^2 - xy + 3y^2)\, dx\, dy \\
= & \int_{y=-1}^{1} \Big/_{x=0}^{2} (\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 y + 3y^2 x)\, dy \\
= & \int_{y=-1}^{1} (\frac{8}{3} - 2y + 6y^2)\, dy \\
= & \Big/_{y=-1}^{1} (\frac{8}{3}y - y^2 + 2y^3) = \frac{28}{3}.
\end{aligned}$$

2. Epähomogeenisen kappaleen massa saadaan integraalina

$$m = \int_V \rho(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x},$$

missä $\rho(\boldsymbol{x})$ on kappaleen tiheys pisteessä $\boldsymbol{x}$. Oletetaan, että särmiön muotoisen kappaleen $[0,2] \times [0,4] \times [0,5]$ tiheys määräytyy funktion $\rho(x,y,z) = 1 + x + 2y + 3z$ mukaisesti. Määritä kappaleen massa.

Mallivastaus:

$$
\begin{aligned}
m &= \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{4}\int_{z=0}^{5}(1+x+2y+3z)\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{4}\Big/_{0}^{5}(z+xz+2yz+\frac{3}{2}z^2)\,dy\,xy \\
&= \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{4}(5x+10y+\frac{85}{2})\,dy\,dx \\
&= \int_{x=0}^{2}\Big/_{0}^{4}(5xy+5y^2+\frac{85}{2}y)\,dx \\
&= \int_{x=0}^{2}(20x+250)\,dx = \Big/_{0}^{2}(10x^2+250x) = 540.
\end{aligned}
$$

3. Olkoon A tason $\mathbb{R}^2$ alue, jota rajoittavat x-akseli, suora $x=1$ ja käyrä $y=x^2$. Laske integraali

$$\int_A (x+y)\,d\boldsymbol{x}.$$

Mallivastaus: Integraali voidaan kirjoittaa muodossa

$$
\begin{aligned}
&\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x^2}(x+y)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{1}\Big/_{y=0}^{x^2}(xy+\frac{1}{2}y^2)\,dx \\
&= \int_{0}^{1}(x^3+\frac{1}{2}x^4)\,dx \\
&= \Big/_{0}^{1}(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{10}x^5) = \frac{7}{20}.
\end{aligned}
$$

4. Laske integraali

$$\int_{y=0}^{1}\int_{x=y}^{1} e^{-x^2}\,dx\,dy$$

vaihtamalla ensin integrointijärjestys. Selvitä aluksi mikä on alue, jonka yli integroidaan.

Mallivastaus: Alue voidaan käydä läpi myös antamalla ensin x:n kulkea väli $[0,1]$ ja sitten y:n väli $[0,x]$, jolloin integraaliksi saadaan

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x} e^{-x^2}\,dy\,dx = \int_{0}^{1} xe^{-x^2}\,dx = \Big/_{0}^{1} -\frac{1}{2}e^{-x^2} = \frac{1}{2}(1-e^{-1}).$$

5. Kappaletta V rajoittavat xy, xz ja yz-tasot sekä tasot $2x+y=2$ ja $z=1+y$. Laske kappaleen tilavuus.

Mallivastaus:

$$
\begin{aligned}
&\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2-2x}\int_{z=0}^{1+y} dz\,dy\,dx = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2-2x}(1+y)\,dy\,dx \\
&= \int_{x=0}^{1}\Big/_{0}^{2-2x}(y+\frac{1}{2}y^2)\,dx = \int_{x=0}^{1}\big(2-2x+\frac{1}{2}(2-2x)^2\big)\,dx \\
&= \int_{0}^{1}(2x^2-6x+4)\,dx = \Big/_{0}^{1}(\frac{2}{3}x^3-3x^2+4x) = \frac{5}{3}.
\end{aligned}
$$

6. Laske

$$\int_A \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\, d\boldsymbol{x},$$

missä A on tason $\mathbb{R}^2$ origokeskisen yksikköympyrän osa, jossa $x \geq 0$, $y \geq 0$ (tason I neljännes). Ohje: Käytä napakoordinaatteja.

Mallivastaus: Napakoordinaatteja käyttämällä kysytty integraali saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
&\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{4-r^2}} r\, d\theta\, dr = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{4-r^2}}\, dr = \frac{\pi}{2} \Big/_{0}^{1} -\sqrt{4-r^2} \\
= \;& \frac{\pi}{2}(2-\sqrt{3}) = \pi(1-\frac{\sqrt{3}}{2}).
\end{aligned}$$

7. Laske

$$\int_{y=0}^{\sqrt{3}}\int_{x=\frac{y}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{4-y^2}} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy.$$

Ohje: Selvitä aluksi mikä on integrointialue ja käytä sitten napakoordinaatteja.

Mallivastaus: Integrointialue on origokeskisen, 2-säteisen ympyrän sektori $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$, joten integraaliksi saadaan

$$\begin{aligned}
&\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}}\int_{r=0}^{2} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}} \Big/_{0}^{2} -\frac{1}{2}e^{-r^2}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (-\frac{1}{2}e^{-4}+\frac{1}{2})\, d\theta \\
= \;& \frac{\pi}{6}(1-e^{-4}).
\end{aligned}$$

8. Laske sen kappaleen tilavuus, jonka lieriö $x^2+y^2=1$ leikkaa pallosta $x^2+y^2+z^2=2$. Ohje: Symmetrian vuoksi voit laskea sen kahdeksasosan tilavuuden, jossa x, y, $z \geq 0$. Laske aluksi sisin integraali z:n suhteen ja käytä xy-koordinaattien sijaan napakoordinaatteja.

Mallivastaus: Kysytyn tilavuuden kahdeksasosa voidaan määrittää integraalina

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{z=0}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{2-x^2-y^2}\, dy\, dx.$$

Napakoordinaattisijoituksella tästä saadaan

$$\begin{aligned}
&\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{1} \sqrt{2-r^2}\, r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{2}\int_{r=0}^{1} \sqrt{2-r^2}\, r\, dr \\
= \;& \frac{\pi}{2} \Big/_{0}^{1} -\frac{1}{3}(2-r^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{6}(\sqrt{8}-1) = \frac{\pi}{6}(2\sqrt{2}-1).
\end{aligned}$$

Kysytty tilavuus on siis kahdeksankertainen saatuun lausekkeeseen nähden.

9. Laske integraali

$$\int_{x=0}^{\frac{1}{2}}\int_{y=x}^{1-x} (\frac{x-y}{x+y})^2\, dy\, dx.$$

Ohje: Sijoita $x=\frac{1}{2}(r-s)$, $y=\frac{1}{2}(r+s)$, piirrä alue uusien rajojen selvittämiseksi ja laske sijoitusfunktion Jacobin matriisin determinantti.

Mallivastaus: Suora $y = x$ korvautuu r-akselilla ja suora $y = -x$ s-akselilla ja integrointirajoiksi saadaan $r \in [0,1]$ ja $s \in [0,r]$. Lisäksi $J_g(r,s) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$.

Tällöin integraali muuntuu muotoon

$$\int_{r=0}^{1} \int_{s=0}^{r} (\frac{-s}{r})^2 \frac{1}{2}\, ds\, dr = \int_{r=0}^{1} \frac{1}{r^2} \left(\Big/_{0}^{r} \frac{1}{6} s^3 \right) dr$$

$$= \frac{1}{6} \int_{r=0}^{1} r\, dr = \frac{1}{6} \Big/_{0}^{1} \frac{1}{2} r^2 = \frac{1}{12}.$$