

## Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 2

### Demonstraatio 2, 25.4.2024

**Huomautus:** Tehtävien numerointi on muuttunut. Aiemmin julkaistun version tehtävä 2 on nyt 3, ja aiemman version tehtävät 3 ja 4 on nyt jaoteltu tehtäviksi 4–7.

1. *Astroidi* on käyrä, jolla on parametriesitys  $\{(\cos^3 t, \sin^3 t) \mid t \in [0, 2\pi)\}$ . Hahmottele kuva ja määritä astroidin reunakäyrän pituus.

2. *Bernoullin lemniskaatta* on käyrä, jolla on napakoordinaattiesitys  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$  ( $a$  on vakio). Hahmottele kuva ja kirjoita lauseke reunakäyrän pituudelle.

Ohje: Parametriesitys saadaan napakoordinaattiesityksestä kirjoittamalla  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , parametrimina  $\theta$ .  $r$  pitää ratkaista napakoordinaattiesityksestä.

3. Määritä käyrän  $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  pituus välillä  $x \in [0, 1]$ .

4. Laske käyräintegraali

$$\int_{\gamma} x^2 dx - xy dy,$$

kun  $\gamma$  on

Jana pisteestä  $(0, 0)$  pisteeseen  $(2, 1)$  (vihje:  $y = \frac{1}{2}x$ ).

5. Laske käyräintegraali

$$\int_{\gamma} x^2 dx - xy dy,$$

kun  $\gamma$  on

Käyrän kaari  $y = \frac{1}{8}x^3$  pisteestä  $(0, 0)$  pisteeseen  $(2, 1)$ .

6. Laske käyräintegraali

$$\int_{\gamma} x^2 dx - xy dy,$$

kun  $\gamma$  on murtoviiva  $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (2, 1)$ . Ohje: esim. murtoviivan 1. osa voidaan esittää parametrimuodossa  $\gamma(t) = (t, 0)$ , kun  $t \in [0, 1]$ .

7. Laske käyräintegraali

$$\int_{\gamma} x^2 dx - xy dy,$$

kun  $\gamma$  on käyrä  $(x(t), y(t)) = (2t^2, t^3)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

8. Kappale (massa  $m$ ) vierii korkeudesta  $h$  maanpinnalle pitkin kourua, jonka muoto noudattaa helix-käyrää  $(\cos t, \sin t, \frac{h}{2\pi}t)$  (kts. J. Lahtosen luentomoniste). Maan painovoiman vaikutus approksimoidaan muotoon  $F = -mg\mathbf{k}$  ( $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ ). Laske käyräintegraalin avulla maan painovoiman tekemä työ kappaleeseen.)

9. Kappale (massa  $m$ ) vierii aikavälissä  $[0, T]$  korkeudesta  $h$  maanpinnalle pitkin kourua, jonka muoto noudattaa jotain käyrää  $(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ , missä  $\gamma_3$  on vähenevä derivoituva funktio, jolle  $\gamma_3(0) = h$  ja  $\gamma_3(T) = 0$ . Maan painovoiman vaikutus oletetaan edellisen tehtävän mukaiseksi. Laske käyräintegraalin avulla maan painovoiman tekemä työ kappaleeseen.