Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 2

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Sijoitus integraaliin

Jos f on reaalifunktio ja g sellainen kasvava ja derivoituva funktio, että $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$, on

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y)\, dy = \int_{a}^{b} f(g(x))g'(x)\, dx$$

Yleistys: Jos $g : U \to V$ on riittävän säännöllinen bijektio, on

$$\int_{V} f(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} = \int_{U} f(g(\boldsymbol{x}))\, |\det(J_g(\boldsymbol{x}))|\ d\boldsymbol{x}$$

Sijoitus integraaliin

Esimerkkejä

Esimerkit 38, 39, 40, 42

Esimerkki

Esimerkki 3.37 (J. Lahtonen)

Käyrä

Käyrä avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on funktio $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, missä $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^n$. Merkitään

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$$

Käyrä on *sileä*, mikäli derivaatat $\gamma_i'(t)$ ovat jatkuvia.

Käyrän pituus

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + \ldots + dx_n^2}$$

Käyrä

Käyrän pituus

$$
\begin{aligned}
L &= \int_\gamma ds = \int_\gamma \sqrt{dx_1^2 + \ldots + dx_n^2} \\
&= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2}\, dt \\
&= \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \ldots + \gamma_n'(t)^2}\, dt
\end{aligned}
$$

Esimerkkejä

J. Lahtonen: Esimerkit 5.6 ja 5.7.

Käyräintegraali

Tangentti

Käyrän γ tangentin suuntavektori:

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$$

Vektorikentän käyräintegraali

Voimavektori $\boldsymbol{F}$, suuntavektori $\boldsymbol{s}$, projektion avulla työ $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}$

Käyräintegraali

Määritelmä

Olkoon $\gamma : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n$ sileä käyrä. Vektorikentän $\boldsymbol{F}$ käyräintegraali käyrää γ pitkin määritellään

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

Käyräintegraali

Merkintä

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x} = \int_\gamma F_1 dx_1 + \ldots + F_n dx_n$$

Esimerkkejä

Esimerkit 44 ja 45, J. Lahtonen: Esim. 5.11

Ominaisuuksia

- $\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{x} = \int_{\gamma_1} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{x} + \int_{\gamma_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{x}$
- $\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{x} = -\int_{-\gamma} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{x}.$
- $\int_\gamma (\alpha \boldsymbol{f} + \beta \boldsymbol{g}) \cdot d\boldsymbol{x} = \alpha \int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{x} + \beta \int_\gamma \boldsymbol{g} \cdot d\boldsymbol{x}$