Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 2

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Käyräintegraali

Määritelmä

Olkoon $\gamma : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n$ sileä käyrä. Vektorikentän $\boldsymbol{F}$ käyräintegraali käyrää γ pitkin määritellään

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

Käyräintegraali

Merkintä

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x} = \int_\gamma F_1 dx_1 + \ldots + F_n dx_n$$

Esimerkkejä

Esimerkit 44 ja 45, J. Lahtonen: Esim. 5.11

Ominaisuuksia

- $\displaystyle\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{x} = \int_{\gamma_1} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{x} + \int_{\gamma_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{x}$
- $\displaystyle\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{x} = -\int_{-\gamma} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{x}.$
- $\displaystyle\int_\gamma (\alpha\boldsymbol{f} + \beta\boldsymbol{g}) \cdot d\boldsymbol{x} = \alpha\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{x} + \beta\int_\gamma \boldsymbol{g} \cdot d\boldsymbol{x}$

Käyräintegraali

Määritelmä

Jos $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on vektorikenttä ja $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sellainen funktio, että $\boldsymbol{f} = \nabla V$, sanotaan että V on vektorikentän *potentiaali*. Tällöin sanotaan myös, että differentiaalimuoto $f_1 dx_1 + \ldots + f_n dx_n$ on *eksakti* ja että sen integraalifunktio on V.

Lause

Jos differentiaalimuoto $f_1 dx_1 + \ldots + f_n dx_n$ on eksakti ja sen potentiaali on V, sekä $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ jatkuva käyrä, $\gamma(a) = \boldsymbol{a}$, $\gamma(b) = \boldsymbol{b}$, on

$$\int_\gamma f_1 dx_1 + \ldots + f_n dx_n = V(\boldsymbol{b}) - V(\boldsymbol{a}).$$

Käyräintegraali

Lause

Jos *tähtimäisessä* alueessa pätee $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, on vektorikentällä $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ potentiaali alueessa.

Esimerkkejä

Esim. 46–48

Skalaariarvoinen funktio

Merkitään $\boldsymbol{T} = ||\gamma'(t)||^{-1}\gamma'(t)$ ja $ds = ||\gamma'(t)||dt$. Tällöin

$$\begin{aligned}\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{x} &= \int_a^b \boldsymbol{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\ &= \int_a^b \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{T}\, ds \\ &= \int_a^b \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{T}||\gamma'(t)||\, dt\end{aligned}$$

Jos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on skalaariarvoinen, määritellään

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))||\gamma'(t)||\, dt$$

Käyräintegraali

Huomautus

Vakioarvoisen skalaarifunktion $f(\boldsymbol{x}) = 1$ käyräintegraali

$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b ||\gamma'(t)||\,dt$$

on käyrän pituus.

Merkintä

Jos γ on suljettu käyrä, merkitään varsinkin fysiikan kirjallisuudessa

$$\int_\gamma f = \oint_\gamma f$$

Pinta-ala

Määritelmä

Pinta avaruudessa $\mathbb{R}^3$ on jatkuvan funktion kuva $f : A \to \mathbb{R}^3$, missä $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

Esimerkkejä

Esimerkit 49–52

Parametrimuoto

$$(u, v) \mapsto (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v), \phi_3(u, v))$$

Huomautus

$$||\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}|| = ||\boldsymbol{x}||||\boldsymbol{y}|| \sin \theta$$

On vektoreiden $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ generoimien suunnikkaan ala.

Pinta-ala

Parametrisoidun pinnan ala

Jos $\phi : E \to \mathbb{R}^3$ on pinnan S (injektiivinen) parametriesitys, on

$$A = \int_E dA = \int_E ||\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial u}||\, du\, dv$$

Esimerkkejä

J. Lahtonen: Esimerkit 6.2. ja 6.3.