Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2024

Demonstraatio 1, 3.10.2024

1. Olkoon $f(x) = 3x + 2$. Laske etäisyys $d(f(x), f(4))$ ja ilmoita se lausekkeella, joka sisältää etäisyyden $d(x, 4)$. Miten $d(f(x), f(4))$ ja $d(x, 4)$ suhtautuvat toisiinsa?

2. Olkoon $f(x) = 4x^2$. Laske etäisyys $d(f(x), f(2))$ ja ilmoita se lausekkeella, joka sisältää etäisyyden $d(x, 2)$. Jos vielä rajoitetaan muttujaa x siten, että $x \in (1, 3)$, millainen yläraja etäisyydelle $d(f(x), f(2))$ saadaan?

3. Jos edellisen tehtävän rajoitetta $x \in (1, 3)$ tiukennetaan muotoon $x \in (1.9, 2.1)$, millainen yläraja etäisyydelle $d(f(x), f(2))$ saadaan?

4. Jos x on lähellä lukua 2, on $\frac{1}{x}$ ilmeisesti lähellä lukua $\frac{1}{2}$. Esitä etäisyydelle $d(\frac{1}{x}, \frac{1}{2})$ lauseke, jossa esiintyy myös $d(x, 2)$. Ohje: Määritelmät ja laventaminen.

5. Otaksutaan edellisessä tehtävässä, että x on niin lähellä lukua 2, että $x \geq 1$. Millainen arvio tällöin saadaan edellisessä tehtävässä kysytylle etäisyyden lausekkeelle?

6. Osoita, että $x^4 - 50x^3 + 20x^2 + 1$ saadaan suuremmaksi kuin mikä tahansa ennalta annettu luku $M > 0$, kunhan x valitaan riittävän suureksi.

   Vihje: Kunhan $x > 1$, on $x^4 - 50x^3 + 20x^2 + 1 > x^4(1 - \frac{50}{x})$ (miksi?). Tämän jälkeen voidaan todeta, että $1 - \frac{50}{x} \geq \frac{1}{2}$ kunhan x on riittävän suuri (kuinka suuri?) Miten saadaan lopullinen johtopäätös?

7. Olkoon $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-3}$. Laske $d(f(x), 4)$ ja osoita, että tämä saadaan miten pieneksi tahansa, kunhan $d(x, 3)$ on riittävän pieni.

8. Selvitä funktion $f(x) = \sin x$ derivaattafunktio määritelmään perustuen:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h}.$$

   Vihje: $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$, $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ ja cos on jatkuva funktio.

9. Määritä derivaattafunktio $f'(x)$, kun $f(x) = \cos^3 x + 2x \sin x + e^{x^3}$.