Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2024

Demonstraatio 1, 3.10.2024

1. Olkoon $f(x) = 3x + 2$. Laske etäisyys $d(f(x), f(4))$ ja ilmoita se lausekkeella, joka sisältää etäisyyden $d(x, 4)$. Miten $d(f(x), f(4))$ ja $d(x, 4)$ suhtautuvat toisiinsa?

   Mallivastaus:

   $$d(f(x), f(4)) = |3x + 2 - 14| = |3x - 12| = 3\,|x - 4| = 3d(x, 4).$$

   $d(f(x), f(4))$ on siis kolminkertainen etäisyyteen $d(x, 4)$ verrattuna.

2. Olkoon $f(x) = 4x^2$. Laske etäisyys $d(f(x), f(2))$ ja ilmoita se lausekkeella, joka sisältää etäisyyden $d(x, 2)$. Jos vielä rajoitetaan muttujaa x siten, että $x \in (1, 3)$, millainen yläraja etäisyydelle $d(f(x), f(2))$ saadaan?

   Mallivastaus:

   $$d(f(x), f(2)) = \left|4x^2 - 16\right| = 4\left|x^2 - 4\right| = 4\,|x + 2|\,|x - 2| = 4\,|x + 2|\,d(x, 2).$$

   Jos $x \in (1, 3)$, on välttämättä $3 < x+2 < 5$ ja siksi $d(f(x), f(2)) < 4{\cdot}5d(x, 2) = 20d(x, 2)$.

3. Jos edellisen tehtävän rajoitetta $x \in (1, 3)$ tiukennetaan muotoon $x \in (1.9, 2.1)$, millainen yläraja etäisyydelle $d(f(x), f(2))$ saadaan?

   Mallivastaus: Jos $x \in (1.9, 2.1)$, on $3.9 < x + 2 < 4.1$ ja siksi $d(f(x), f(2)) < 4 \cdot 4.1d(x, 2) = 16.4d(x, 2)$.

4. Jos x on lähellä lukua 2, on $\frac{1}{x}$ ilmeisesti lähellä lukua $\frac{1}{2}$. Esitä etäisyydelle $d(\frac{1}{x}, \frac{1}{2})$ lauseke, jossa esiintyy myös $d(x, 2)$. Ohje: Määritelmät ja laventaminen.

   Mallivastaus:

   $$d(\frac{1}{x}, \frac{1}{2}) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x - 2}{2x}\right| = \frac{1}{2\,|x|}\,|x - 2| = \frac{1}{2\,|x|}d(x, 2).$$

5. Otaksutaan edellisessä tehtävässä, että x on niin lähellä lukua 2, että $x \geq 1$. Millainen arvio tällöin saadaan edellisessä tehtävässä kysytylle etäisyyden lausekkeelle?

   Mallivastaus: Jos $x \geq 1$, on $\frac{1}{2|x|} = \frac{1}{2x} \leq \frac{1}{2}$. Täten

   $$d(\frac{1}{x}, \frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2}d(x, 2).$$

6. Osoita, että $x^4 - 50x^3 + 20x^2 + 1$ saadaan suuremmaksi kuin mikä tahansa ennalta annettu luku $M > 0$, kunhan x valitaan riittävän suureksi.

   Vihje: Kunhan $x > 1$, on $x^4 - 50x^3 + 20x^2 + 1 > x^4(1 - \frac{50}{x})$ (miksi?). Tämän jälkeen voidaan todeta, että $1 - \frac{50}{x} \geq \frac{1}{2}$ kunhan x on riittävän suuri (kuinka suuri?) Miten saadaan lopullinen johtopäätös?

   Mallivastaus: Koska $20x^2 + 1 > 0$, on $x^4 - 50x^3 + 20x^2 + 1 > x^4 - 50x^3 = x^4(1 - \frac{50}{x})$. Jos $x > 100$, on $\frac{50}{x} < \frac{1}{2}$ ja siksi $x^4(1 - \frac{50}{x}) > \frac{1}{2}x^4$. Kun siis $x > 100$, on

   $$x^4 - 50x^3 + 20x^2 + 1 > \frac{1}{2}x^4,$$

ja puolestaan $\frac{1}{2}x^4 > M$, kun $x^4 > 2M$, mikä taas tapahtuum kun $> \sqrt[4]{2M}$. Jos siis $x > \max\{100, \sqrt[4]{2M}\}$, on

$$x^4 - 50x^3 + 20x^2 + 1 > M.$$

7. Olkoon $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-3}$. Laske $d(f(x), 4)$ ja osoita, että tämä saadaan miten pieneksi tahansa, kunhan $d(x, 3)$ on riittävän pieni.

   Mallivastaus:

$$\begin{aligned} d(f(x),4) &= \left|\frac{x^2-2x-3}{x-3} - 4\right| = \left|\frac{x^2-2x-3}{x-3} - \frac{4(x-2)}{x-3}\right| = \left|\frac{x^2-6x+9}{x-3}\right| \\ &= \left|\frac{(x-3)^2}{x-3}\right| = |x-3| = d(x,3). \end{aligned}$$

   Koska etäisyydet $d(f(4), 4)$ ja $d(x, 3)$ ovat ylläolevan yhtälöketjun perusteella samat, on edellinen pieni, mikäli jälkimmäinen on pieni.

8. Selvitä funktion $f(x) = \sin x$ derivaattafunktio määritelmään perustuen:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}.$$

   Vihje: $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$, $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ja cos on jatkuva funktio.

   Mallivastaus:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos \frac{2x+h}{2}}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos \frac{2x+h}{2} \xrightarrow{h \to 0} 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

   Viimeisin yhtäsuuruus perustuu tulon raja-arvosääntöön ja kosinin jatkuvuuteen.

9. Määritä derivaattafunktio $f'(x)$, kun $f(x) = \cos^3 x + 2x \sin x + e^{x^3}$.

   Mallivastaus:

$$f'(x) = 3cos^2 x \cdot \sin x + 2 \sin x + 2x \cos x + e^{x^3} \cdot 3x^2.$$