

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2024

Demonstraatio 2, 10.10.2024

Huom: Vastaukset pitää perustella ilman matematiikkaohjelmia ellei toisin mainita. Älä käytä tekoälyä vaan omaasi.

1. Olkoon $f(x) = 3x^5 + 2x^3 - 2$. Perustele miksi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on bijektio. Määritä $Df^{-1}(3)$. Ohje: Käytä käänteisfunktion derivoitissääntöä. On selvitettävä sellainen x , jolla $f(x) = 3$ (miksi?) Kokeile joitain pieniä lukuarvoja tämän yhtälön ratkaisemiseksi.

2. Yhtälö

$$2x^3y - 5xy^3 + y^4 - 7 = 0$$

määrittelee jossakin pisteen $(x, y) = (2, 1)$ ympäristössä derivoituvan funktion $y = f(x)$. Totea että piste $(2, 1)$ toteuttaa yhtälön ja määritä $f'(2)$.

3. Parametrimuoto $\{(2t^3 - 3t^2 + t + 1, t^2 + 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$ määrittelee jossakin pisteen $(x, y) = (7, 6)$ ympäristössä derivoituvan funktion $y = f(x)$. Määritä $f'(7)$.

4. Olkoon $f(x, y) = 2x^3y - 5xy^3 + y^4 - 7$. Laske $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

5. Olkoon $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Määritä $f^{(n)}(x)$ kun $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

6. Määritä $\int x \ln x \, dx$. Vihje: Osittaisintegrointi.

7. Määritä $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$ käyttämällä sijoitusta $x = t^2$.

8. Määritä $\int \frac{1}{(x-2)(x+3)} \, dx$. Vihje: Etsi luentoimerkin mukaisesti sellaiset luvut A ja B että

$$\frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}.$$

9. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} + x^2 - 1}{x^4}.$$

Vihje: L'Hospitalin sääntö.